Praktische Anweisung

zur

logarithmischen algebraischen Rechnung

in Beziehung

auf die Staffel- und Anticipationsrechnung, die Waldbestandsberechnung, den antichretischen Calcul und die Zeitrentenberechnung

mit

einer methodisch geordneten Auswahl

von brauchbaren Beispielen

sowohl zur Selbstübung als auch für den öffentlichen und Privatunterricht

von

Johann Wolfgang Müller,
Professor der Mathematik am Königl. Gymnasium zu Nürnberg.

Nürnberg, 1814.
bei Gustav Philipp Jacob Bieling
und in Commission
der Joh. Benjamin Georg Fleischerschen Buchhandlung
in Leipzig.

Vorrede.

Der Endzweck dieser Schrift, welche als eine Fortsetzung der praktischen Anweisung zur algebraischen und combinatorischen Rechnung angesehen, aber auch als ein eigenes, für sich bestehendes Werk benützt werden kann, ist die Theorie der Logarithmen faßlich aufzustellen, ferner die Anwendung derselben bei vielen Rechnungen für die bürgerlichen Geschäfte zu zeigen, und an mehreren Beispielen zu erläutern. Auch ist überall eine hinlängliche Anzahl Exempel zur Selbstübung, oder zu dem Gebrauch bei dem Unterricht, in methodischer Ordnung angegeben. Die Formeln für den Antichretischen Calcul, für die Waldbestandsberechnung und Zeitrentenberechnung, sind aus einer einzigen Grundformel abgeleitet, und für die Rechnung mit Logarithmen eingerichtet. Sie lassen sich wohl einfacher ausdrücken, aber dann sind sie mehr geeignet, die Resultate vermittelst berechneter Tafeln des Interusuriums eines angenommenen Capitals u. s. f. zu finden, welches zu zeigen in dieser Schrift meine Absicht nicht ist.

Johann Wolfgang Müller.

Inhalts-

Inhaltsanzeige.

Erster Abschnitt.

Seite

Von den geometrischen Progessionen - 1

Zweiter Abschnitt.

Von den Logarithmen - - - 28

Den Logarithmus eines unächten Bruchs zu finden - - - - 52

Den Logarithmus einer gemischten Zahl zu finden - - - - 53

Den Logarithmus einer ganzen Zahl zu finden, welche größer ist, als die in der Tabelle befindlichen Zahlen - 59

Den Logarithmus eines ächten Bruchs zu finden 64

Die Zahl zu finden, die zu einem Logarithmus gehört, der sich in der Tabelle nicht befindet 67

Den ächten Bruch zu finden, welcher zu einem negativen Logarithmus gehört - 75

Anwendung der Logarithmen.

1) Zu drei gegebenen Zahlen, vermittelst der Logarithmen, die vierte geometrische Proportionalzahl zu finden. - - 78

2) Einen Kettensatz vermittelst der Logarithmen zu berechnen - - - - 79

3) Ver-

Seite

3) Vermittelst der Logarithmen eine gegebene Zahl auf eine bestimmte Potenz zu erheben 81

4) Vermittelst der Logarithmen aus einer gegebenen Zahl die Wurzel eines bestimmten Grades auszuziehen - - 85

5) Vermittelst der Logarithmen zu finden, die wie vielste Potenz von a eine gegebene Zahl m ist, oder wenn $a^x = m$ ist, den Potenzexponenten x zu berechnen - 90

6) Vermittelst der Logarithmen zu finden, die wie vielste Wurzel von b eine gegebene Zahl m ist, oder wenn $\sqrt[x]{b} = m$, den Wurzelexponenten x zu berechnen. - - 93

Dritter Abschnitt.

Von der Berechnung der Logarithmen für jedes beliebige System, vermittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten - 96

Vierter Abschnitt.

Anleitung zur Berechnung der zusammengesetzten Formeln, in denen Wurzelausziehungen von einem beliebigen Grad und Logarithmen vorkommen. - - - - 119

Fünfter Abschnitt.

Exponentialgleichungen und ihre Auflösung 124

Sechs-

Sechster Abschnitt.

Seite
Von den Reihen, welche aus einer arithmetischen und geometrischen Progression zusammengesetzt sind - - - 132

Siebenter Abschnitt.

Von dem Interusurium oder der Staffelrechnung 147

Achter Abschnitt.

Bestimmung der Veränderung einer Größe, die in gleichen Zeiträumen um das nämliche Procent zunimmt, aber in den nämlichen Zeiträumen um einerlei Größe vermehrt oder vermindert wird - - - 172

Neunter Abschnitt.

Antichretischer Calcul - - - 242

Zehnter Abschnitt.

Waldbestandsberechnung - - - 256

Eilfter Abschnitt.

Zeitrentenberechnung - - - 274
Zusatz zu §. 39. des zweiten Abschn. Seite 66. 321
Zusatz zu §. 5. Seite 100. - - 323

Erster Abschnitt.

Von den geometrischen Progressionen.

§. 1.

Eine geometrische Progression ist eine Reihe von Größen, in der iede Größe zur nächstfolgenden das nemliche geometrische Verhältniß hat. Z. B. 3, 12, 48, 192, 768 u. s. f. ist eine geometrische Progression, weil 3 in 12 so vielmal enthalten ist, als 12 in 48, ferner weil 12 in 48 so vielmal enthalten als 48 in 192 u. s. f. Eben so, ist 8, 24, 72, 216, 648 u. s. f. eine geometrische Progression, weil iede Zahl in der folgenden gleich vielmal, nemlich dreymal enthalten ist.

§. 2. Die Größen, aus denen die geometrische Progression besteht, heißen die Glieder der geometrischen Progression.

§. 3. Wenn die folgenden Glieder einer geometrischen Progression größer sind, als die vorhergehenden, so heißt die Progression eine zunehmende geometrische Progression. Z. B. 5, 10, 20, 40, 80, 160 u. s. f. ist eine zunehmende geometrische Progression.

§. 4. Wenn aber die folgenden Glieder kleiner sind als die vorhergehenden, so heißt eine

solche geometrische Progression, eine **abnehmende**. Z. B. 768, 192, 48, 12, 3 ist eine abnehmende geometrische Progression.

§. 5. Diejenige Zahl, mit der jedes Glied der geometrischen Progression multiplicirt werden muß, um das nächstfolgende Glied zu erhalten, heißt der **Exponent** *) der geometrischen Progression. Z. B. Wenn die zunehmende geometrische Progression 10, 50, 250, 1250, 6250, gegeben ist, so ist der Exponent derselben die Zahl 5. Ferner wenn die abnehmende geometrische Progression 6250, 1260, 250, 50, 10 gegeben ist, so ist der Exponent derselben der ächte Bruch $\frac{1}{5}$, denn 6250 multiplicirt mit $\frac{1}{5}$ giebt den fünften Theil von 6250, welcher 1250 ist, u. s. f. Ferner in der abnehmenden geometrischen Progression 243, 162, 108, 72, 48 ist der Exponent derselben der ächte Bruch $\frac{2}{3}$, denn 243 mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt, giebt 162, 162 mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt, giebt 108 u. s. f.

§. 6. Bei einer zunehmenden geometrischen Progression ist der Exponent derselben entweder eine **ganze Zahl**, oder eine **gemischte Zahl**, oder eine **Irrationalzahl**.

Z. B.

*) Man muß diesen Progressionsexponenten von einem Potenzexponenten wohl unterscheiden. Der Progressionsexponent deutet an, wie vielmal ein Glied in dem andern enthalten ist, der Potenzexponent aber, wie vielmal eine Zahl als Factor gesetzt werden muß.

Z. B. Es sey die zunehmende geometrische Progression:

$5\frac{1}{4}$, $31\frac{1}{2}$, 189, 1134, 6804

so ist der Exponent derselben die ganze Zahl 6.

In der zunehmenden geometrischen Progression

4, 14, 49, $171\frac{1}{2}$, $600\frac{1}{4}$

ist der Exponent derselben die gemischte Zahl $3\frac{1}{2}$.

In der zunehmenden geometrischen Progression

7, $21\sqrt{2}$, 126, $378\sqrt{2}$, 2268

ist der Exponent derselben die Irrationalzahl $3\sqrt{2}$.

§. 7. Bei einer abnehmenden geometrischen Progression ist der Exponent derselben kleiner als 1, folglich ein ächter Bruch, der entweder rational, z. B. $\frac{3}{4}$ oder irrational, z. B. $\frac{\sqrt{5}}{6}$ seyn kann.

§. 8. Wenn die Glieder der geometrischen Progression Zahlen sind, so findet man den Exponenten der geometrischen Progression, wenn man ein beliebiges Glied derselben mit dem nächstvorhergehenden Gliede dividirt.

§. 9. Wenn man den Progressions-Exponenten mit m, und das erste Glied der Progression mit a bezeichnet, so ist das zweite Glied = am. Denn wenn man mit dem Exponenten m das erste Glied multiplicirt, so erhält man das zweite Glied (§. 5.). Das dritte Glied erhält man, wenn man

das zweite Glied am wiederum mit m multiplicirt (§. 5.), es ist also das dritte Glied = amm. Da aber mm, oder m mal m das Quadrat von m ist, und dieses mit m^2 bezeichnet wird, so ist das dritte Glied = am^2. Das vierte Glied erhält man, wenn man das dritte Glied amm wiederum mit m multiplicirt, es ist also = ammm. Nun ist mmm die dritte Potenz von m, welche mit m^3 bezeichnet werden kann, folglich ist das vierte Glied = am^3. Das fünfte Glied der geometrischen Progression wird also seyn am^4, oder a multiplicirt mit der vierten Potenz von m, das sechste Glied am^5 oder a multiplicirt mit der fünften Potenz von m. Folglich kann eine geometrische Progression, deren erstes Glied a, und der Exponent derselben m ist, mit Buchstaben so ausgedrückt werden:

Zahl	a,	am,	am^2,	am^3,	am^4,	am^5	u. s. f.
der Glieder	1,	2,	3,	4,	5,	6,	

Die darunter gesetzten Zahlen bedeuten die Zahl der Glieder, oder sie zeigen an, das wievielste das darüberstehende Glied ist. Z. B. am^3 ist das vierte, am^5 das sechste Glied. Auf diese Art kann n bedeuten, daß das darüber stehende Glied das nte ist.

§. 10. Um dieses nte Glied mit Buchstaben gehörig auszudrücken, vergleiche man jedes Glied mit der darunter stehenden Zahl. Z. B. unter dem dritten Glied steht die Zahl 3, und über dieser

Zahl

Z. B. Es sey die zunehmende geometrische Progression:

$5\frac{1}{4}$, $31\frac{1}{2}$, 189, 1134, 6804

so ist der Exponent derselben die ganze Zahl 6.

In der zunehmenden geometrischen Progression

4, 14, 49, $171\frac{1}{2}$, $600\frac{1}{4}$

ist der Exponent derselben die gemischte Zahl $3\frac{1}{2}$.

In der zunehmenden geometrischen Progression

7, $21\sqrt{2}$, 126, $378\sqrt{2}$, 2268

ist der Exponent derselben die Irrationalzahl $3\sqrt{2}$.

§. 7. Bei einer abnehmenden geometrischen Progression ist der Exponent derselben kleiner als 1, folglich ein ächter Bruch, der entweder rational, z. B. $\frac{3}{4}$ oder irrational, z. B. $\frac{\sqrt{5}}{6}$ seyn kann.

§. 8. Wenn die Glieder der geometrischen Progression Zahlen sind, so findet man den Exponenten der geometrischen Progression, wenn man ein beliebiges Glied derselben mit dem nächstvorhergehenden Gliede dividirt.

§. 9. Wenn man den Progressions-Exponenten mit m, und das erste Glied der Progression mit a bezeichnet, so ist das zweite Glied = am. Denn wenn man mit dem Exponenten m das erste Glied multiplicirt, so erhält man das zweite Glied (§. 5.). Das dritte Glied erhält man, wenn man

das zweite Glied am wiederum mit m multiplicirt (§. 5.), es ist also das dritte Glied = amm. Da aber mm, oder m mal m das Quadrat von m ist, und dieses mit m^2 bezeichnet wird, so ist das dritte Glied = am^2. Das vierte Glied erhält man, wenn man das dritte Glied amm wiederum mit m multiplicirt, es ist also = ammm. Nun ist mmm die dritte Potenz von m, welche mit m^3 bezeichnet werden kann, folglich ist das vierte Glied = am^3. Das fünfte Glied der geometrischen Progression wird also seyn am^4, oder a multiplicirt mit der vierten Potenz von m, das sechste Glied am^5 oder a multiplicirt mit der fünften Potenz von m Folglich kann eine geometrische Progression, deren erstes Glied a, und der Exponent derselben m ist, mit Buchstaben so ausgedrückt werden:

Zahl	a,	am,	am^2,	am^3,	am^4,	am^5 u. s. f.
der Glieder	1,	2,	3,	4,	5,	6,

Die darunter gesetzten Zahlen bedeuten die Zahl der Glieder, oder sie zeigen an, das wievielste das darüberstehende Glied ist. Z. B. am^3 ist das vierte, am^5 das sechste Glied. Auf diese Art kann n bedeuten, daß das darüber stehende Glied das nte ist.

§. 10. Um dieses nte Glied mit Buchstaben gehörig auszudrücken, vergleiche man iedes Glied mit der darunter stehenden Zahl. Z. B. unter dem dritten Glied steht die Zahl 3, und über dieser

Zahl

Zahl der Ausdruck am^2. Betrachtet man bey der Potenz m^2 den Potenz-Exponenten 2, und vergleicht ihn mit der unter dem Glied am^2 stehenden Zahl 3, so bemerkt man leicht, daß er um eins weniger als diese Zahl, oder daß er $= 3 - 1$. Eben so ist das sechste Glied $= am^5$, das ist $= am^{6-1}$. Also wird das 12te Glied seyn am^{12-1} oder am^{11}, das 50ste Glied am^{50-1} oder am^{49}, folglich das nte Glied $= am^{n-1}$.

§. 11. Bezeichnet man das nte Glied, oder, wie man es auch nennt, das allgemeine oder lezte Glied mit z, so ist $z = am^{n-1}$.

§ 12. Vermittelst dieser Formel kann man in ieder geometrischen Progression, in der das erste Glied a, der Exponent der Progression m, und die Anzahl der Glieder n gegeben ist, ein beliebiges Glied berechnen. Z. B. Wie ist das 9te Glied einer geometrischen Progression, deren erstes Glied $a = 7$ und der Progressions-Exponent $m = 10$. Hier ist $z = 7 . 10^{9-1}$ oder $z = 7 . 10^8$; man erhebe also 10 auf die achte Potenz, diese ist 100000000, und multiplicire diese Potenz mit 7, so ist das 9te Glied oder $z = 700000000$.

Ferner es soll das sechste Glied einer geometrischen Progression gefunden werden, deren erstes Glied 67, und der Progressionsexponent 8 ist? Hier ist $a = 67$, $m = 8$ und $n = 6$. Da nun $z = am^{n-1}$, so ist in diesem Falle $z = 67 . 8^5$; man erhebe also 8 auf die 5te Potenz.

$$\begin{array}{rl} 8 & \\ 8 & \\ \hline 64 & \text{2te Potenz.} \\ 8 & \\ \hline 512 & \text{3te Potenz.} \\ 8 & \\ \hline 4096 & \text{4te Potenz.} \\ 8 & \\ \hline 32768 & \text{5te Potenz.} \end{array}$$

Hierauf diese mult. mit 67

$$\begin{array}{r} 229376 \\ 196608 \\ \hline 2195456 = z \end{array}$$

§. 13. Da $z = am^{n-1}$

so ist $\frac{z}{m^{n-1}} = a$

Nemlich wenn das letzte Glied z, der Progressions-exponent m, und die Zahl der Glieder n gegeben ist, und es wird das erste Glied a gesucht, so findet man solches, wenn man z mit am^{n-1} dividirt.

§. 14. Ferner, da $z = am^{n-1}$

so ist $\frac{z}{a} = m^{n-1}$

also $\sqrt[n-1]{\frac{a}{z}} = m$

Diese Formel zeigt, wie m zu finden ist, wenn z, a und n gegeben sind. Allein der Gebrauch dieser Formel erfordert, daß man Wurzeln von iedem gegebenen Grade ausziehen könne, oder man muß im Stande seyn, reine Gleichungen von iedem Grade aufzulösen. Diese Auflösung kann erst in der Folge gezeigt werden, weil sie Kenntniß der Progressionen und Logarithmen voraussetzt.

§. 15. Endlich, da $z = am^{n-1}$, so sey z, a und m gegeben, und man suche die Anzahl der Glieder n. Nach §. 14. ist ($\frac{z}{a} = m^{n-1}$.) In dieser Gleichung ist die unbekannte Größe im Exponenten der Potenz. Da nun n unbekannt ist, so ist auch $n - 1$ unbekannt, also sey $n - 1 = x$ so ist

$$\frac{z}{a} = m^x$$

Eine solche Gleichung, in der die unbekannte Größe nicht ein Coefficient einer bekannten Größe, sondern der Potenzexponent derselben ist, heißt eine Exponentialgleichung. Man kann sie ohne Logarithmen nicht bequem auflößen. Die Theorie der Logarithmen kann aber in der Folge erst vorgetragen werden, weil sie selbst auf der Theorie der geometrischen und arithmetischen Progressionen beruht.

§. 16. Die Summe einer geometrischen Progression heißt das was heraus kömmt, wenn man alle Glieder einer gegebenen geometrischen Progression addirt.

§. 17. Es läßt sich eine Formel finden, welche die Regel enthält, wie man die gedachte Summe berechnen kann, ohne daß man nöthig hat, alle Glieder einzeln zu addiren. Z. B. Die gegebene geometrische Progreßion sey

$$a \quad am \quad am^2 \quad am^3 \quad am^4$$

in welcher das erste Glied $= a$, der Progreßionsexponent $= m$, und das letzte Glied $z = am^4$ ist, und man setze, ihre Summe sey $= s$, oder

$$a + am + am^2 + am^3 + am^4 = s$$

Man multiplicire diese Gleichung mit m, so entsteht folgende Gleichung

$$am + am^2 + am^3 \; am^4 + am^5 = ms$$

weil Gleiches mit Gleichem multiplicirt, wieder Gleiches giebt.

Man kehre die eine Seite in ieder dieser beiden Gleichungen um, und subtrahire die erste Gleichung von der zweiten, so sind die Reste auch gleich. Nemlich

von $am^5 + am^4 + am^3 + am^2 + am \quad = ms$

subtrah. $\quad am^4 + am^3 + am^2 + am + a = s$

so ist $am^5 \qquad - a = ms - s$

Wenn man aber den Ausdruck $ms - s$ in seine Factoren zerlegt, so ist solcher $m - 1$ multiplicirt mit s, oder $(m - 1)s$, also ist

$$am^5 - a = (m - 1)s$$

Nun

Nun ist am^4 das letzte Glied der gegebenen Progression, oder $am^4 = z$, und am^5 entstund, indem am^4 mit m multiplicirt wurde, also ist $am^5 = zm$, folglich, wenn man den Werth zm statt am^5 in der letzten Gleichung substituirt, so ist

$$zm - a = (m - 1)s$$

folglich $\frac{zm - a}{m - 1} = s$

§. 18. Dieses ist nun die Formel, die Summe s einer geometrischen Progression zu finden, wenn das erste Glied a, das letzte Glied z, und der Progressionsexponent m gegeben ist. Mit Worten ausgedruckt, heißt sie, man multiplicire z mit m, subtrahire von diesem Product das erste Glied a, und diesen Rest dividire man mit dem um 1 verminderten Progressionsexponenten.

Z. B. Es sey von einer geometrischen Progression, deren Exponent $m = 11$, erstes Glied $a = 13$ und letztes Glied $z = 2093663$ die Summe s zu finden.

$$\begin{array}{rr} z = & 2093663 \\ m = & 11 \\ \hline & 2093663 \\ & 2093663 \\ \hline zm = & 23030293 \end{array} \qquad m - 1 = 10$$

subtrahirt $a = 13$

$$10 | 23030280 | 2303028 = s$$

§. 19. Aus der Formel $\frac{zm - a}{m - 1} = s$ lassen sich drey andere ableiten.

Nemlich da $\frac{zm - a}{m - 1} = s$

so ist $zm - a = (m - 1)s$

das ist $zm - a = sm - s$

also $zm + s = sm + a$

Folglich $zm + s - sm = a$

Diese Formel dient in einer geometrischen Progression das erste Glied a zu finden, wenn z, m und s gegeben ist.

§. 20. Ferner da $zm - a = (m - 1)s$

so ist $zm = (m - 1)s + a$

also $z = \frac{(m - 1)s + a}{m}$.

Vermittelst dieser Formel kann man in einer geometrischen Progression das letzte Glied z finden, wenn a, m und s gegeben ist.

§. 21. Endlich, da $zm - a = sm - s$

so ist $s - a = sm - zm$

das ist $s - a = (s - z)m$

also $\frac{s - a}{s - z} = m$

Vermittelst dieser Formel kann man in einer geometrischen Progression den Progressionsexponenten m finden, wenn a, z und s gegeben sind.

§. 22.

§. 22. Da $z = am^{n-1}$ (§. 11.) u. $\frac{zm-a}{m-1} = s$ (§. 17.) so substituire man in dieser zweiten Gleichung den Werth am^{n-1} von z aus der ersten, dadurch erhält man $\frac{am^{n-1}\,m-a}{m-1} = s$. Da aber $m = m^1$, und zwei Potenzen des nemlichen Buchstabens mit einander multiplicirt werden, wenn man die Potenzexponenten addirt, so ist $m^{n-1}\,m^1$ eben soviel als m^{n-1+1} d. i. m^n, also $am^{n-1}\,m$ soviel als am^n, daher ist

$$\frac{am^n - a}{m-1} = s$$

oder auch $\frac{(m^n-1)a}{m-1} = s$

§. 23. Vermittelst dieser Formel kann man die Summe s einer geometrischen Progression finden, wenn a, m und n gegeben sind. Z. B. Wie viel beträgt die Summe einer geometrischen Progression, deren erstes Glied $a = 10$, der Progressionsexponent $m = 5$ und die Anzahl der Glieder $n = 6$ ist?

Hier ist $\frac{(5^6 - 1)\,10}{5-1} = s$

Nun

Nun ist 5 die erste Potenz von sich
5
25 die 2te Potenz von ſ
5
125 die 3te Potenz
5
625 die 4te Potenz
5
3125 die 5te Potenz
5
15625 die 6te Potenz.
subtrahirt 1
$15624 = 5^6 - 1$
mult. mit 10
$156240 = (5^6 - 1)\,10$

Dieses Product dividirt mit $5 - 1$ oder mit 4

4|156240|39060 = der Summe ſ.

§ 24. Wenn man eine abnehmende geometrische Progression umkehrt, das heißt, ihr letztes Glied zum ersten macht, ihr vorletztes Glied zum zweiten u. s. f. endlich ihr erstes Glied zum letzten, so entsteht eine zunehmende geometrische Progression, deren Summe mit der Summe der gedachten abnehmenden einerley ist. Also kann eine abnehmende geometrische Progression leicht summirt werden, wenn man die Summe einer Zunehmenden sucht, welche die umgekehrte der abnehmenden ist.

Z. B.

Z. B. Es sey die abnehmende geometrische Progression 1215, 405, 135, 45, 15, 5 zu summiren, so ist in derselben $a = 1215$, $z = 5$, $m = \frac{1}{3}$, nun stelle man sich eine zunehmende geometrische Progression vor, in der $a = 5$, $z = 1215$ und $m = 3$ ist, und suche die Summe dieser Progression vermittelst der Formel des §. 17. $\frac{zm - a}{m - 1} = s$ das ist $\frac{1215 . 3 - 5}{3 - 1}$ oder $\frac{3645 - 5}{2}$, das ist $\frac{3640}{2}$ oder $1820 = s$.

Nemlich es sey in der abnehmenden geometrischen Progression der Progressionsexponent der ächte Bruch $\frac{p}{r}$, so ist in der umgekehrten Progression der Progressionsexponent $m = \frac{r}{p}$, der umgekehrte des vorigen.

Gesetzt es soll die Summe einer abnehmenden geometrischen Progression gefunden werden, deren erstes Glied $a = 243$, das letzte Glied $z = 32$ und der Progressionsexponent $\frac{2}{3}$ ist, so ist in der umgekehrten zunehmenden Progression $a = 32$, $z = 243$ und $m = \frac{3}{2}$ oder $1\frac{1}{2}$

also da $\frac{zm - a}{m - 1} = s$, so ist $\frac{243 . 1\frac{1}{2} - 32}{1\frac{1}{2} - 1} = s$

das ist $\frac{364\frac{1}{2} - 32}{\frac{1}{2}} = s$ oder $\frac{332\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = s$ und wenn man Zähler und Nenner mit 2 multiplicirt, so ist $665 = s$.

§. 25.

§. 25. Doch läßt sich eine abnehmende geometrische Progression auch bequem auf folgende Art summiren. In ihr ist das letzte Glied z kleiner als das erste a, und m ein ächter Bruch, also auch zm kleiner als a. Wenn sie nun vermittelst der Formel $\frac{zm - a}{m - 1}$ summirt werden soll, so ist zm — a negativ, und eben so m — 1 negativ, oder zm — a ist $= -(a - zm)$, u. m — 1 ist $= -(1 - m)$. Also $\frac{zm - a}{m - 1} = \frac{-(a - zm)}{-(1 - m)}$. Da aber, wenn eine negative Zahl mit einer negativen dividirt wird, der Quotient positiv ist, so ist $\frac{-(a - zm)}{-(1 - m)} = \frac{a - zm}{1 - m}$. Folglich $\frac{zm - a}{m - 1} = \frac{a - zm}{1 - m}$. Z. B. $\frac{23 - 8}{6 - 1}$, ist $= \frac{15}{5}$ oder $= 3$, u. $\frac{8 - 23}{1 - 6}$ ist $= \frac{-15}{-5}$, oder auch $= 3$. Wenn also eine abnehmende geometrische Progression, in der das erste Glied a, das letzte z und der Progressionsexponent m gegeben ist, summirt werden soll, so ist

$$\frac{a - zm}{1 - m} = s.$$

Z. B. Es sey in einer abnehmenden geometrischen Progression, das erste Glied $a = 243$, das letzte Glied $z = 32$, und der Progressionsexponent $m = \frac{2}{3}$, so ist die Summe $s = \frac{a - zm}{1 - m}$, in diesem Fall $= \frac{243 - 32 \cdot \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}}$, d. i. $= \frac{243 - 21\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}$ od. $= \frac{221\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}$ oder wenn man Zähler und Nenner mit 3 multiplicirt, so ist $s = 665$.

§. 26. Wenn bei einer abnehmenden geometrischen Progression das erste Glied a, der Progressionsexponent m, und die Anzahl der Glieder n gegeben ist, so ist die Summe derselben oder $s = \frac{a - am^n}{1 - m}$. Dieses ist begreiflich aus §. 22. verglichen mit §. 25., nemlich $\frac{a - am^n}{1 - m}$ ist soviel als $\frac{am^n - a}{m - 1}$. Z. B. In einer abnehmenden geometrischen Progression sey $a = 2048$, $m = \frac{3}{4}$ und $n = 6$, so ist die Summe $\frac{a - am^n}{1 - m}$ oder $\frac{a(1 - m^n)}{1 - m}$ hier $= \frac{2048(1 - (\frac{3}{4})^6)}{1 - \frac{3}{4}}$, (d. i. da $(\frac{3}{4})^6 = \frac{3^6}{4^6} = \frac{729}{4096}$) $= \frac{2048(1 - \frac{729}{4096})}{1 - \frac{3}{4}}$ oder $= \frac{2048 \cdot \frac{3367}{4096}}{\frac{1}{4}}$ d. i. wenn man Zähler u. Nenner mit 4 multipl. $= \frac{2048 \cdot 3367 \cdot 4}{4096}$, oder $= \frac{3367 \cdot 4}{2}$, das ist $= 3367 \cdot 2$, folglich $6734 = s$.

§. 27. Da in einer abnehmenden geometrischen Progression der Progressionsexponent m ein ächter Bruch ist, so sey dessen Zähler = b und der Nenner = c, oder $m = \frac{b}{c}$. Ist nun a, z und $\frac{b}{c}$ gegeben, und es soll die Summe s dieser Progression gefunden werden, so ist solche (nach §.

25.) $= \frac{a - zm}{1 - m}$, d. i. wenn man statt m den Bruch $\frac{b}{c}$ substituirt, $\frac{a - z\frac{b}{c}}{1 - \frac{b}{c}} = s$ und wenn man Zähler und Nenner dieses Ausdrucks mit c multiplicirt, $\frac{ac - zb}{c - b} = s$. Wenn man vermittelst dieser Formel die Summe einer abnehmenden geometrischen Progression berechnet, so vermeidet man die beschwerliche Bruchrechnung. Z. B. Es sey $a = 243$, $z = 32$ und $m = \frac{2}{3}$, folglich $b = 2$ und $c = 3$, so ist die Summe $s = \frac{243 \cdot 3 - 32 \cdot 2}{3 - 2}$, oder $s = \frac{729 - 64}{1}$, d. i. $s = 665$.

§. 28. Da in einer abnehmenden geometrischen Progression iedes folgende Glied kleiner ist, als das zunächst vorhergehende, so werden die Glieder sich immer mehr dem Werth Null nähern, ie weiter man die Progression fortsetzt, ohne ihn iedoch ganz zu erreichen, so lange die Anzahl der Glieder endlich ist. Nimmt man aber an, daß die abnehmende geometrische Progression in das Unendliche fortgesetzt wird, und man stellt sich eine solche Progression als vollendet vor, so ist das letzte Glied z von Null so wenig unterschieden, daß sich dieser Unterschied durch keine Zahl angeben läßt, so klein sie auch seyn mag, das heißt: das letzte Glied z darf selbst als Null angesehen werden,

denn

denn wäre z nicht = Null, so liese sich eine Zahl angeben, indem man z mit m multiplicirt, die kleiner als z und folglich dem Werth von Null näher wäre, d. h. es liese sich noch ein folgendes Glied angeben, die unendliche Reihe wäre also noch nicht vollendet. Ist nun $z = 0$, so ist $mz = m$ mal Null, oder mz ist auch $= 0$. Da nun die Summe s einer abnehmenden geometrischen Progression $= \frac{a - zm}{1 - m}$ ist, (§. 25.) so ist die Summe s einer abnehmenden geometrischen Progression mit unendlich vielen Gliedern $= \frac{a - 0}{1 - m}$ oder $s = \frac{a}{1 - m}$.

§. 29. Man setze in der gedachten Progression $m = \frac{b}{c}$, so ist $s = \frac{a}{1 - \frac{b}{c}}$ und wenn man Zähler und Nenner dieses Ausdrucks mit c multiplicirt, so ist $s = \frac{ac}{c - b}$. Z. B. Wie viel beträgt $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} +$ u. s. f. ins Unendliche?

Hier ist $a = \frac{1}{2}$, $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$, folglich $b = 1$ und $c = 2$, also ist die Summe $= \frac{\frac{1}{2} \cdot 2}{2 - 1}$, d. i. $s = \frac{1}{1}$, oder $s = 1$. Die Summe dieser ins Unendliche fortgesetzten Reihe von Brüchen, beträgt also genau 1. Dieses ist auch leicht begreiflich. Denn die Summe von zwei Gliedern beträgt $\frac{3}{4}$, die von drey Gliedern, oder $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ beträgt $\frac{7}{8}$, die Summe von vier Gliedern, oder $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ $+ \frac{1}{8}$

$+ \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ beträgt $\frac{15}{16}$. Es ist aber $\frac{3}{4}$ von 1 um $\frac{1}{4}$ unterschieden, $\frac{7}{8}$ nur um $\frac{1}{8}$, $\frac{15}{16}$ nur um $\frac{1}{16}$. So nähert sich also die Summe dieser Progression immer mehr der Eins, wenn man ein neues Glied hinzufügt.

§. 30. Da bey einer geometrischen Progression, wenn a, m und n gegeben sind, die Summe $s = \frac{am^n - a}{m - 1}$ (§. 22.) so kann a gefunden werden, wenn m, n und s als bekannt angesehen werden.

Denn da $\frac{am^n - a}{m - 1} = s$

so ist $am^n - a = (m - 1)s$

oder $(m^n - 1)a = (m - 1)s$

also $a = \frac{(m - 1)s}{m^n - 1}$

§. 31. Ferner kann m gefunden werden, wenn a, s und n gegeben sind.

Denn da $\frac{am^n - a}{m - 1} = s$

so ist $am^n - a = sm - s$

also $am^n = sm + a - s$

folglich $am^n - sm = a - s$

und $m^n - \frac{s}{a}m = 1 - \frac{s}{a}$

Aus

Aus dieser Gleichung muß also m entwickelt werden. Ist nun n größer als 2, so ist dieses eine höhere Gleichung.

§. 32. Endlich kann n gefunden werden, wenn a, s und m gegeben sind.

Nemlich da $am^n = sm + a - s$ (§. 31.)

so ist $m^n = \frac{a + sm - s}{a}$

oder $m^n = \frac{a + (m - 1)s}{a}$

Da nun in dieser Gleichung die unbekannte Größe n der Potenzexponent ist, so ist sie eine Exponentialgleichung. Es gilt also auch hier die Bemerkung, welche bey dem 15ten Paragraph gemacht wurde.

§. 33. Ausser den vom §. 11. bis §. 32. entwickelten Formeln, um aus drey gegebenen Stücken einer geometrischen Progression das vierte zu finden, können noch mehrere hergeleitet werden, so daß in allem 20 verschiedene Formeln sich ergeben, welche in der folgenden Tabelle geordnet sind, in der a das erste Glied, z das letzte Glied, m den Exponenten, n die Anzahl der Glieder und s die Summe einer geometrischen Progression bedeutet.

Gegebene Stücke.	Gesuchtes Stück.	
z,m,n	a	$a = \frac{z}{m^{n-1}}$
z,n,s	a	$a(s-a)^{n-1} - z(s-z)^{n-1} = 0$
z,m,s	a	$a = zm - (m-1)s$
m,n,s	a	$a = \frac{(m-1)s}{m^n - 1}$
a,z,n	m	$m = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$
a,n,s	m	$m^n - \frac{s}{a}m + \frac{s-a}{a} = 0$
a,z,s	m	$m = \frac{s-a}{s-z}$
z,n,s	m	$m^n - \frac{s}{s-z}m^{n-1} + \frac{z}{s-z} = 0$
a,z,m	n	$n = \frac{\log. z - \log. a}{\log. m} + 1$
a,z,s	n	$n = \frac{\log. z - \log. a}{\log. (s-a) - \log. (s-z)} + 1$
a,m,s	n	$n = \frac{\log. [a + (m-1)s] - \log. a}{\log. m}$
z,m,s	n	$n = \frac{\log. z - \log. [zm - (m-1)s]}{\log. m} + 1$

Gegebene Stücke.	Gesuchtes Stück.	
a,m,n	z	$z = a m^{n-1}$
a, n, s	z	$z (s-z)^{n-1} - a (s-a)^{n-1} = 0$
a,m, s	z	$z = \frac{a + (m-1) s}{m}$
m,n,s	z	$z = \frac{(m-1) s m^{n-1}}{m^n - 1}$
a, z, n	s	$s = \frac{\sqrt[n-1]{z^n} - \sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{z} - \sqrt[n-1]{a}}$
a,m,n	s	$s = \frac{a (m^n - 1)}{m - 1}$
a,m,z	s	$s = \frac{zm - a}{m - 1}$
z,m,n	s	$s = \frac{z (m^n - 1)}{(m - 1) m^{n-1}}$

Erste Anmerkung.

Die in dieser Tabelle aufgestellten zwanzig Formeln werden auf folgende Art hergeleitet. Die

 beiden

beiden Grundformeln sind die 13te $z = a m^{n-1}$ und die 19te $\frac{zm - a}{m - 1} = s$. Aus der ersten Grundformel wird entwickelt, a, m und n, oder hergeleitet N. 1, 5 und 9 der Tabelle. Aus der zweiten Grundformel wird entwickelt z, a und m, oder hergeleitet N. 15, 3 und 7 der Tabelle. Nun verbindet man die beiden Grundformeln, nemlich man substituirt 1) den Werth von z aus der ersten in die zweite statt z, und entwickelt aus der zweiten s, a, m und n, so erhält man N. 18, 4, 6 und 11 der Tabelle, ferner substituirt man 2) den aus der ersten Grundformel entwickelten Werth von a, d. h. den Ausdruck N. 1. der Tabelle, für a in die zweite Grundformel, und entwickelt aus der zweiten s, z, m und n, so erhält man N. 20, 16, 8 und 12 der Tabelle. Endlich substituirt man 3) den aus der ersten Grundformel entwickelten Werth von m oder den Ausdruck N. 5. der Tabelle für m in die zweite Grundformel, und entwickelt aus der zweiten s, a, n und z, so erhält man N. 17, 2, 10 und 14 der Tabelle. Diese entwickelten zwanzig Formeln werden alsdann in eine Tabelle, in Beziehung auf die gesuchte Größe geordnet, und iedesmal vier von denen, bei welchen die gesuchte Größe die nemliche ist, zusammengestellt, damit man sie bei dem Gebrauch sogleich finden kann. Daß die Tabelle vollständig ist, d. h. daß nicht mehrere als diese zwanzig Formeln möglich sind, läßt sich leicht zeigen. Denn bei einer geometrischen Progression sind fünf

Stücke,

Stücke, a, m, n, s und z, aus dreyen dieser Stücke kann allemal das vierte gefunden werden, also hat man iedesmal eine Gleichung, in der vier Stücke vorkommen, drey gegebene und ein gesuchtes. Es ist also zu bestimmen, wie viele Gleichungen aus den fünf Stücken a, m, n, s und z möglich sind, so daß iede Gleichung vier von diesen Stücken enthält, die aber mit den vier Stücken einer andern nicht einerley sind, d. h. es ist die Anzahl der Combinationen von 5 Elementen zu vieren anzugeben. Diese ist aber $= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ oder 5. Diese fünf Complexionen sind nemlich: amns, amnz, amsz, ansz und mnsz. Gesetzt nun, eine Gleichung enthalte die vier Elemente a, m, n, s, so kann eines nach dem andern als unbekannt angesehen werden, folglich giebt diese Gleichung vier Formeln, da aber iede der übrigen Gleichungen auch vier Formeln giebt, so sind in allem vier mal fünf oder 20 Formeln möglich.

Zweite Anmerkung.

Die folgenden Exempel beziehen sich blos auf dieienigen Formeln der Tabelle, die ohne Logarithmen, ohne Wurzelausziehung, und ohne Auflösung höherer Gleichungen berechnet werden können. Für die übrigen Formeln werden die Exempel erst in der Folge vorgelegt werden.

beiden Grundformeln sind die 13te $z = am^{n-1}$ und die 19te $\frac{zm - a}{m - 1} = s$. Aus der ersten Grundformel wird entwickelt, a, m und n, oder hergeleitet N. 1, 5 und 9 der Tabelle. Aus der zweiten Grundformel wird entwickelt z, a und m, oder hergeleitet N. 15, 3 und 7 der Tabelle. Nun verbindet man die beiden Grundformeln, nemlich man substituirt 1) den Werth von z aus der ersten in die zweite statt z, und entwickelt aus der zweiten s, a, m und n, so erhält man N. 18, 4, 6 und 11 der Tabelle, ferner substituirt man 2) den aus der ersten Grundformel entwickelten Werth von a, d. h. den Ausdruck N. 1. der Tabelle, für a in die zweite Grundformel, und entwickelt aus der zweiten s, z, m und n, so erhält man N. 20, 16, 8 und 12 der Tabelle. Endlich substituirt man 3) den aus der ersten Grundformel entwickelten Werth von m oder den Ausdruck N. 5. der Tabelle für m in die zweite Grundformel, und entwickelt aus der zweiten s, a, n und z, so erhält man N. 17, 2, 10 und 14 der Tabelle. Diese entwickelten zwanzig Formeln werden alsdann in eine Tabelle, in Beziehung auf die gesuchte Größe geordnet, und iedesmal vier von denen, bei welchen die gesuchte Größe die nemliche ist, zusammengestellt, damit man sie bei dem Gebrauch sogleich finden kann. Daß die Tabelle vollständig ist, d. h. daß nicht mehrere als diese zwanzig Formeln möglich sind, läßt sich leicht zeigen. Denn bei einer geometrischen Progression sind fünf

Stücke,

Stücke, a, m, n, s und z, aus dreyen dieser Stücke kann allemal das vierte gefunden werden, also hat man iedesmal eine Gleichung, in der vier Stücke vorkommen, drey gegebene und ein gesuchtes. Es ist also zu bestimmen, wie viele Gleichungen aus den fünf Stücken a, m, n, s und z möglich sind, so daß iede Gleichung vier von diesen Stücken enthält, die aber mit den vier Stücken einer andern nicht einerley sind, d. h. es ist die Anzahl der Combinationen von 5 Elementen zu vieren anzugeben. Diese ist aber $= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ oder 5. Diese fünf Complexionen sind nemlich: amns, amnz, amsz, ansz und mnsz. Gesetzt nun, eine Gleichung enthalte die vier Elemente a, m, n, s, so kann eines nach dem andern als unbekannt angesehen werden, folglich giebt diese Gleichung vier Formeln, da aber iede der übrigen Gleichungen auch vier Formeln giebt, so sind in allem vier mal fünf oder 20 Formeln möglich.

Zweite Anmerkung.

Die folgenden Exempel beziehen sich blos auf dieienigen Formeln der Tabelle, die ohne Logarithmen, ohne Wurzelausziehung, und ohne Auflösung höherer Gleichungen berechnet werden können. Für die übrigen Formeln werden die Exempel erst in der Folge vorgelegt werden.

Exempel zur Uebung.

1) Jemand setzt 3 Kr. in das Lotto, und nimmt sich vor das Spiel zehnmal zu duppliren. Es ist die Frage wie viel er das letztemal setzen muß? Antw. 1536 Kr. oder 25 fl. 36 Kr.

2) Wie viel beträgt die Summe, der im ersten Exempel gedachten Einlagen? Antw. 3069 Kr. oder 51 fl. 9 Kr. (da z nemlich im ersten Exempel gefunden ist, so kann man s vermittelst der 19ten Formel finden. Wäre aber z noch nicht gefunden, so berechne man s nach der 18ten Formel.)

3) Es hat iemand einen Metzen Weizen ausgesäet, die Ernde davon säet er im zweiten Jahr wieder ganz aus, und von dieser zweiten Aussaat hat er wieder die ganze Ernde im dritten Jahr ausgesäet, u. s. f. Wie viel wird er wohl im zehnten Jahr ernden, wenn man annimmt, daß ieder Metzen Aussaat iährlich vier Metzen Ernde giebt? (Hier ist nemlich eine geometrische Progression, in der das erste Glied $a = 4$, der Progressionsexponent m auch $= 4$, und die Anzahl der Glieder $n = 10$ ist, das letzte Glied z wird gesucht.) Antw. 1048576 Metzen.

4) Es will iemand einen Diamant, der vier Karat wiegt, mit der Bedingung kaufen, daß er für den ersten Karat 40 fl. und für ieden folgenden Karat dreimal soviel als für den vorhergehenden zahlt. Was kostet dieser Diamant? Antw. 1600 fl.

5) Wie

5) Wie ist die Summe einer geometrischen Progression von acht Gliedern, deren letztes Glied 114688, und in der der Progressionsexponent 4 ist? (Diese wird vermittelst der 20sten Formel gefunden.) Antw. 152915.

6) Es giebt sieben Zahlen, die in einer geometrischen Progression stehen, und welche so beschaffen sind, daß wenn man die ersten sechs addirt, die Summe 2548, und wenn man die letztern sechs addirt, die Summe 7644 ist. Welche Zahlen sind es? (Es sey das erste Glied $= x$, und der Progressionsexponent $= y$, so können die sieben gesuchten Zahlen so bezeichnet werden: $x, xy, xy^2, xy^3, xy^4, xy^5, xy^6$ weil sie eine geometrische Progression formiren. Nun ist nach der Bedingung

$$xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 = 7644$$

und

$$x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 = 2548$$

also $xy^6 - x = 7644 - 2548$, d. i. $= 5096$.

Nach der 19ten Formel der Tabelle ist aber die Summe der zweiten hier angesetzten Progression $\frac{xy^6 - x}{y - 1}$, d. i. $\frac{xy^6 - x}{y - 1} = 2548$, also $xy^6 - x = 2548y - 2548$, folglich $2548y - 2548 = 5096$. Nun ist y leicht zu entwickeln, und da $xy^6 - x = 5096$, oder $(y^6 - 1)x = 5096$, so ist $x = \frac{5096}{y^6 - 1}$. Hat man nun y und x gefunden, so lassen sich die sieben Zahlen darstellen, wenn man

man in den Ausdrücken x, xy, xy^2 u. s. f. die gefundenen Werthe von x und y substituirt. Wenn man bei der Auflösung nicht nach der hier gezeigten Art verfährt, so wird solche sehr weitläufig werden. Antw. Die sieben Zahlen sind: 7, 21, 63, 189, 567, 1701, 5103.

7) Welchem Bruch ist der Decimalbruch 0,333333 . . . ins Unendliche fortgesetzt, gleich? (Hier ist die Summe einer abnehmenden geometrischen Progression, nach der Formel im 29 §. $\frac{ac}{c-b} = s$ zu berechnen. Der Progressionsexponent $\frac{b}{c}$ ist hier $\frac{1}{10}$, weil 0,333 . . . so viel ist, als $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000}$ u. s. f. also ist $b = 1$ und $c = 10$, ferner ist $a = \frac{3}{10}$.) Antw. Genau einem Drittel.

8) Welchem Bruch ist der Decimalbruch 0,575757 . . . u. s. f. ins Unendliche, gleich? (Da $0{,}575757 \ldots = \frac{5}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{7}{10000}$ u. s. f. oder $= \frac{57}{100} + \frac{57}{10000} + \frac{57}{1000000}$ . . . so ist $a = \frac{57}{100}$, $\frac{b}{c} = \frac{1}{100}$, also $b = 1$ und $c = 100$. Nun kann man nach §. 29. leicht die Summe berechnen.) Antwort. Genau dem Bruch $\frac{19}{33}$.

9) Welchem Bruch ist der Decimalbruch 0,428571428571 . . . dessen Decimalziffern nach sechs Stellen ins Unendliche fort wiederkehren, gleich? (Wenn man eine allgemeine Regel für die

die Verwandlung solcher Decimalbrüche in gewöhnliche Brüche finden will, so betrachte man die wiederkehrenden Decimalziffern, diese seyn $= p$, und der Nenner für diese Anzahl der wiederkehrenden Decimalziffern $= r$, so hat der Decimalbruch folgende Form $\frac{p}{r} + \frac{p}{r^2} + \frac{p}{r^3} \ldots$ einer geometrischen Progression, in welcher der Progressionsexponent $\frac{b}{c} = \frac{1}{r}$, und das erste Glied $a = \frac{p}{r}$ ist. Da nun $\frac{b}{c} = \frac{1}{r}$ ist, so ist $b = 1$ und $c = r$. Diese Werthe substituire man in der im §. 29. angegebenen Formel $\frac{ac}{c-b} = s$, so hat man $\frac{\frac{p}{r} \cdot r}{r-1}$ oder $\frac{p}{r-1} = s$. Man darf also blos die wiederkehrenden Decimalziffern, als ganze Zahl betrachtet, zum Zähler eines Bruchs s ansetzen, und den zu diesen wiederkehrenden Ziffern gehörigen Nenner r, er sey 10, oder 100 oder 1000 u. s. f. um eins vermindern, oder so viele Neunen als wiederkehrende Decimalziffern, sind zum Nenner des gedachten Bruchs s machen, und diesen Bruch heben, indem man den größten gemeinschaftlichen Theiler seines Zählers und Nenners sucht. Antw. Dieser Decimalbruch ist dem gewöhnlichen Bruch $\frac{428571}{999999}$ gleich, welcher, wenn man ihn mit dem größten gemeinschäftlichen Theiler 142857 hebt, den Bruch $\frac{3}{7}$ giebt.

Zwei-

Zweiter Abschnitt.

Von den Logarithmen.

§. 1.

Logarithmen sind Hülfszahlen, durch deren Gebrauch die Rechnung erleichtert wird, weil man statt der Multiplication die Addition, statt der Division die Subtraction, und statt des Wurzelausziehens die Division, anwenden darf. Ihre Theorie beruht auf folgenden Gründen.

§. 2. Wenn sich eine geometrische Progression von 1 anfängt, so sind alle Glieder Potenzen des zweiten Gliedes, und das zweite Glied selbst ist dem Progressionsexponenten gleich. Nemlich eine geometrische Progression, deren erstes Glied = 1 und der Progressionsexponent = m ist, läßt sich so darstellen:

$$1, m, m^2, m^3, m^4, m^5 \text{ u. s. f.}$$

Denn wenn das erste Glied 1 mit m multiplicirt wird, so ist das Product m das zweite Glied, dieses wieder mit m multiplicirt, giebt mm, oder die zweite Potenz von m, (die mit m^2 bezeichnet wird) zum dritten Glied, dieses m^2 wieder mit m multiplicirt, giebt mmm, oder die dritte Potenz

Potenz von m, (die mit m^3 bezeichnet wird) zum vierten Glied u. s. f.

§. 3. Nun ist bekannt, daß wenn zwei Potenzen des nemlichen Buchstabens mit einander multiplicirt werden sollen, man blos ihre Exponenten addiren darf, nemlich $m^3 . m^5 = m^{3+5}$ oder $= m^8$. Ferner, daß wenn eine Potenz mit einer andern Potenz des nemlichen Buchstabens dividirt werden soll, man blos den Exponenten der letztern vom Exponenten der erstern subtrahiren darf, nemlich m^7 dividirt mit m^3 oder $\frac{m^7}{m^3}$ ist $= m^{7-3}$ d. i. $= m^4$.

§. 4. Daraus folgt, daß $1 = m^0$. Denn $\frac{m}{m}$ ist $= 1$, aber m ist $= m^1$ also $\frac{m^1}{m^1} = 1$, aber $\frac{m^1}{m^1} = m^{1-1}$ oder $= m^0$ (§. 3.) also ist $m^0 = 1$. Daher kann obige im §. 2. befindliche geometrische Progression so ausgedrückt werden:

$$m^0, m^1, m^2, m^3, m^4, m^5 . . \text{u. s. f.}$$

Man setze die Potenzexponenten 0, 1, 2, 3, 4, 5 u. s. f. unter die gehörigen Glieder,

$$\begin{matrix} m^0, & m^1, & m^2, & m^3, & m^4, & m^5 & . . \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \end{matrix}$$

so sind die unten stehenden Zahlen Glieder einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied $= 0$, und die Differenz $= 1$ ist. Jede dieser Zahlen giebt

giebt nun an, wie viele Verhältnisse in der darüber stehenden geometrischen Progression, vom ersten Glied m^0 an gerechnet, bis zu demienigen Glied sind, welches sich über der gedachten Zahl befindet. Z. B. Die unten stehende Zahl 4 giebt an, daß in der geometrischen Progression vom ersten Glied m^0 an, bis zu dem über der Zahl 4 befindlichen Glied m^4, vier gleiche geometrische Verhältnisse sind, nemlich $m^0 : m^1$ ist das erste, $m^1 : m^2$ das zweite, $m^2 : m^3$ das dritte, und $m^3 : m^4$ das vierte geometrische Verhältniß. Daher heissen die unten stehenden Zahlen **Verhältnißzähler** oder **Logarithmen**, und zwar ist 3 der Logarithmus von dem dazu gehörigen Glied m^3, ferner 4 der Logarithmus von m^4 u. s. f. welches so bezeichnet wird, $3 = \log. m^3$, $4 = \log. m^4$ u. s. f.

§. 5. Die Logarithmen sind also mit den Potenzexponenten der Glieder der geometrischen Progression, die sich von 1 anfängt, einerley. Z. B. von der Potenz m^3 ist der Exponent $= 3$, und der Logarithmus von m^3 ist auch $= 3$. Wenn also überhaupt eine Potenz m^n vorkommt, so ist n der Logarithmus von m^n, oder $n = \log. m^n$, in so ferne nemlich m^n als ein Glied einer geometrischen Progression angesehen wird, die sich von 1 oder m^0 anfängt, und deren Glieder Potenzen von m sind, die Exponenten dieser Potenzen mögen ganze Zahlen oder Brüche seyn. Das letztere findet statt, wenn zwischen die Glieder der vorhin

vorhin angegebenen geometrischen Progreßion neue Glieder eingeschaltet werden. Z. B. Wenn die Quadratwurzel aus m gezogen wird, so fällt solche zwischen 1 und m, da nun die $\sqrt{m}$ bezeichnet wird $m^{\frac{1}{2}}$, so ist $\log. m^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

§. 6. Da für das Glied m einer geometrischen Progreßion, die sich von 1 anfängt, iede beliebige Zahl angenommen werden kann, und die folgenden Glieder m^2, m^3 u. s. f. von der angenommenen Zahl m abhängen, die Glieder der damit verbundenen arithmetischen Progreßion aber beständig 0, 1, 2, 3 u. s. f. sind, so finden unendlich viele solche Verbindungen statt. Man nennt eine solche Verbindung ein logarithmisches System, folglich finden unendlich viele logarithmische Systeme statt. Das Glied m der gedachten geometrischen Progreßion, dessen Logarithmus also = 1 ist, heißt die Basis oder Grundzahl des logarithmischen Systems.

§. 7. Z. B. 1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5 .. u. s. f.
0, 1 2 3 4 5 .. u. s. f.

ist ein logarithmisches System, dessen Basis = 3 ist. In diesem System ist 1, der Log. von 3, 2 der Log. von 3^2 oder von 9, 5 der Log. von 3^5 oder von 243, welches sich deutlich zeigt, wenn man die Glieder der geometrischen Progreßion berechnet.

Nemlich 1, 3, 9, 27, 81, 243 . . .
Log. 0, 1, 2, 3, 4, 5

§. 8.

§. 8. Ferner $1, 5, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5 \ldots$
$0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$
ist ein anderes logarithmisches System, dessen Basis 5 ist. Hier ist also 1 der Log. von 5, 2 der Log. von 5^2 oder von 25, 5 der Log. von 5^5 oder von 3125, welches noch deutlicher sich zeigt, wenn man die Glieder der geom. Progression berechnet. Nemlich $1, 5, 25, 125, 625, 3125 \ldots$
Log. $0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$

§. 9. Ferner $1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5 \ldots$
$0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$
ist wieder ein anderes logarithmisches System, dessen Basis 10 ist. Hier ist also 1 der Log. von 10, 2 der Log. von 10^2 oder von 100, 3 der Log. von 10^3 oder von 1000, welches sich deutlich zeigt, wenn man die Glieder der geometrischen Progression berechnet. Nemlich:

$1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 \ldots$
Log. $0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$

In diesem Logarithmischen System hat ieder Logarithmus so viele Einer, als die darüber stehende Zahl Nullen hat. Z. B. der Logarithmus 3 hat 3 Einer, und die dazu gehörige Zahl 1000 hat drei Nullen. Oder ieder Logarithmus hat einen Einer weniger, als die dazu gehörige Zahl Ziffern hat. Z. B. die Zahl 1000 hat vier Ziffern, und der zu ihr gehörige Logarithmus 3 hat nur drey Einer. Dieses System ist das gewöhnliche logarithmische System, für welches die meisten

loga-

logarithmischen Tafeln berechnet sind, und heißt das Briggische, und die Logarithmen dieses Systems heisen die Briggischen Logarithmen, weil sie der Engländer Heinrich Brigg auf diese Art berechnet und im Jahr 1624 in seiner Arithmetica logarithmica bekannt gemacht hat. — Uebrigens ist aus dem Vorhingesagten klar, daß in iedem log. System der Logarithmus von 1 Null ist, weil 1 als m^0 betrachtet wird.

§. 10. Man kann sich eine gegebene Zahl b als eine gewisse Potenz der Basis m eines beliebigen logarithmischen Systems vorstellen, d. i. es ist $b = m^p$, und eine andere gegebene Zahl c als eine andere Potenz der Basis m in dem nemlichen logarithmischen System, d. i. $c = m^r$. Z. B. Es sey $b = 81$ und $c = 6561$, und das logarithmische System habe die Basis 81, so kann b als die erste und c als die zweite Potenz dieser Basis betrachtet werden, ist aber die Basis des logarithmischen Systems 9, so kann b als die zweite und c als die vierte Potenz dieser Basis betrachtet werden, den 81 ist $= 9^2$ und $6561 = 9^4$, ist ferner die Basis des logarithmischen Systems $= 3$, so kann b als die vierte und c als die achte Potenz dieser Basis angesehen werden, denn 81 ist $= 3^4$ und $6561 = 3^8$.

§. 11. In einem beliebigen logarithmischen System ist die Summe der Logarithmen zweier Zahlen b und c dem Logarithmus des Products dieser Zahlen gleich. Z. B. $\log. 4 + \log. 6 =$

log. 24. Um dieses leichter einzusehen, betrachte man folgendes Schema:

$$\begin{array}{lccccccc} & & & & b & & c & bc \\ & 1, & m, & m^2, m^3 \ldots & m^p & \ldots & m^r & \ldots m^{p+r} \\ \text{Log.} & 0 & 1 & 2 \quad 3 & p & & r & p+r \end{array}$$

Es sey nemlich m die Basis des logarithmischen Systems, $b = m^p$ und $c = m^r$, also $bc = m^p\, m^r$, d. i. $bc = m^{p+r}$ (§. 3.), folglich log. bc = log. m^{p+r}. Nun ist aber log. $m^{p+r} = p + r$ (§. 5.) d. i. log. $bc = p + r$. Es ist aber p = log. m^p (§. 5.) und r = log. m^r (§. 5.) also log. bc = log. m^p + log. m^r. Da nun $m^p = b$ und $m^r = c$, so ist log. bc = log. b + log. c.

§. 12. Eben dieses findet auch statt, wenn mehr als zwei Zahlen gegeben sind. Denn wenn drey Zahlen b, c und d gegeben sind, so ist log. b + log. c = log. bc, (§. 11.) nun betrachte man das Product bc als eine einzige Zahl, und setze solches = h, so ist hd = bcd; nun ist log. hd = log. h + log. d, (§. 11.) aber log. h oder log. bc war = log. b + log. c, also ist log. hd oder log. bcd = log. b + log. c + log. d. Z. B. Da 420 = 5. 7. 12, so ist log. 420 = log. 5 + log. 7 + log. 12.

§. 13. Eben so läßt sich dieser Satz darthun für vier und für mehrere Zahlen. Auch ist klar, daß wenn bei zwei Zahlen b und c, die eine der andern gleich ist, bc = bb ist, folglich log. bb = log. b + log. b.

§. 14.

§. 14. In einem beliebigen logarithmischen System ist die Differenz der Logarithmen zweier Zahlen b und c, dem Logarithmus des Quotienten dieser Zahlen gleich. Z. B. log. 15 — log. 4 = log. $\frac{15}{4}$ und log. 4 — log. 15 = log. $\frac{4}{15}$.

Denn es sey m die Basis des log. Systems, $b = m^p$ und $c = m^r$, so ist $\frac{c}{b} = \frac{m^r}{m^p}$ d. i. $= m^{r-p}$ (§. 3.), also log. $\frac{c}{b}$ = log. m^{r-p}. Es ist aber log. $m^{r-p} = r - p$, (§. 5.) also ist $r - p$ = log. $\frac{c}{b}$; ferner ist r = log. m^r, d. i. r = log. c, auch ist p = log. m^p, d. i. p = log. b, also $r - p$ = log. c — log. b, daher log. c — log. b = log. $\frac{c}{b}$.

Eben so läßt sich erweisen, daß log. b — log. c = log. $\frac{b}{c}$.

§. 15. In einem beliebigen logarithmischen System erhält man den Logarithmus einer gewissen Potenz einer gegebenen Zahl b, wenn man den Logarithmus der Zahl b, mit dem Potenzexponenten n multiplicirt. Z. B. log. 7^3 = 3 log. 7, eben so ist log. 314^8 = 8 log. 314, oder überhaupt log. b^n = n log. b.

Denn es sey $n = 2$, so ist log. b^2 = log. bb, aber log. bb ist = log. b + log. b, (§. 13.)

 und

und log. b + log. b ist = 2 log. b, also ist log. b^2 = 2 log. b. Es sey ferner n = 3, so ist log. b^3 = log. bbb, d. i. log. b^3 = log. b + log. b + log b, oder log. b^3 = 3 log. b. Ist nun n = 4, so wird log. b^4 = 4 log. b seyn u. s. f. das heißt so vielmal b in der Potenz als Factor gesetzt ist, eben so viele Einer hat die Zahl, womit der Logarithmus von b multiplicirt ist. Da nun b^n die nte Potenz von b ist, in der also b nmal als Factor vorkommt, so hat die Zahl, womit der Logarithmus von b multiplicirt werden muß, auch n Einer, d. i. log. b^n = n log. b.

§. 16. In einem beliebigen logarithmischen System erhält man den Logarithmus einer gewissen Wurzel einer gegebenen Zahl b, wenn man den Logarithmus der Zahl b mit dem Wurzelexponenten n dividirt. Z. B. log. $\sqrt[3]{8} = \frac{\log. 8}{3}$, eben so ist log. $\sqrt[5]{486} = \frac{\log 486}{5}$, und überhaupt log. $\sqrt[n]{b}$ $= \frac{\log. b}{n}$ oder $= \frac{1}{n}$ log. b.

Denn es sey b = m^n, so ist log. b = log. m^n, aber log. m^n ist = n log. m, (§. 15.) folglich log. b = n log. m, also, wenn man mit n dividirt, $\frac{\log. b}{n}$ = log. m. Da aber b = m^n ist, so ist $\sqrt[n]{b}$ = m, also log. $\sqrt[n]{b}$ = log. m. Nun war log. m $= \frac{\log. b}{n}$, folglich ist log. $\sqrt[n]{b} = \frac{\log. b}{n}$.

§. 17. Da in den logarithmischen Tabellen die Briggischen Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 10000, und in manchen von 1 bis 100000 enthalten sind, die im §. 9. befindliche Progression aber nur die Briggischen Logarithmen von 1, 10, 100, 1000, 10000 und 100000 angiebt, so ist die Frage, wie die Briggischen Logarithmen derienigen ganzen Zahlen, die zwischen die eben genannten Zahlen fallen, berechnet werden. Die Antwort findet sich im nächsten Abschnitt. Hier bemerke ich nur folgendes. Da in iedem logarithmischen System log. 1 = 0, und überdieß in dem Briggischen System log. 10 = 1 ist, so müssen die Briggischen Logarithmen derienigen ganzen Zahlen, die zwischen 1 und 10 liegen, größer als 0 und kleiner als 1, d. h. sie müssen einem ächten Bruch gleich seyn, der als Decimalbruch mit einer unendlichen Menge Decimalstellen ausgedrückt wird. So ist zum Beispiel

log. 2 = 0,301019995663 98 . . . . u. s. f.
log. 3 = 0,47712125471966 . . . .
log. 4 = 0,60205999132796 . . . .
log. 5 = 0,69897000433601 . . . .
log. 6 = 0,77815125038364 . . . .
log. 7 = 0,84509804001425 . . . .
log. 8 = 0,90308998699194 . . . .
log. 9 = 0,95424250943932 . . . .

§. 18. In den gewöhnlichen logarithmischen Tafeln, sind die Briggischen Logarithmen nur bis auf sieben Decimalstellen angegeben. Z. B. Der

Log. von 2 in den Tabellen ist 0,3010300. Man sieht, wenn man ihn mit dem oben stehenden vergleicht, daß er um etwas zu groß ist, allein er übertrift den eigentlichen Logarithmus doch nicht um so viel als der Defect betragen würde, wenn man ihn in der Tabelle 0,3010299 ausgedrückt hätte, denn er würde alsdann um mehr als $\frac{1}{10000000000}$ zu klein seyn, da im Gegentheil sein Ueberschuß kaum $\frac{5}{10000000000}$ beträgt. Aus diesem Grund ist die siebente Decimalziffer der Logarithmen in der Tabelle öfters etwas zu groß angegeben, in dem Fall nemlich, wenn die folgende achte Decimalziffer, die nicht mehr in der Tabelle steht, 6, 7, 8 oder 9 ist.

§. 19. Da in dem Briggischen System log. 10 = 1 und log. 100 = 2, so müssen die Briggischen Logarithmen derienigen Zahlen, welche zwischen 10 und 100 fallen, größer als 1 und kleiner als 2 seyn. So ist zum Beispiel in der Tabelle.

$$\log. 11 = 1,0413927$$
$$\log. 99 = 1,9956352$$

§. 20. Da in dem Briggischen System log. 100 = 2 und log. 1000 = 3 ist, so müssen die Briggischen Logarithmen derienigen Zahlen, welche zwischen 100 und 1000 fallen, größer als 2 und kleiner als 3 seyn. So ist z. B. in der Tabelle:

$$\log. 101 = 2,0043214$$
$$\log. 999 = 2,9995655$$

§. 21. Da ferner in dem Briggischen System log. 1000 = 3 und log. 10000 = 4, so sind die Briggischen Logarithmen derjenigen Zahlen, welche zwischen 1000 und 10000 fallen, grösser als 3 und kleiner als 4. Z. B. in der Tabelle ist

log. 4531 = 3,6561941

§. 22. Die ganze Zahl des Logarithmus heißt die Kennziffer oder Charakteristik des Logarithmus, weil man in dem Briggischen System an ihr erkennen kann, wie viele Ziffern die zum Briggischen Logarithmus gehörige Zahl hat (§. 9.). Es sey nemlich der Briggische Logarithmus 3,8972421, so ist dessen ganze Zahl 3 die Kennziffer, weil man an der Anzahl ihrer Einer erkennt, daß die zu diesem Logarithmus gehörige Zahl aus vier Ziffern besteht (§. 9. und §. 21.), denn die Kennziffer eines Briggischen Logarithmus hat immer eine Eins weniger, als die zu diesem Briggischen Logarithmus gehörige Zahl Ziffern hat. Ferner sey der Briggische Logarithmus 4,5933968, so sieht man an seiner Kennziffer 4, daß die zu ihm gehörige Zahl fünf Ziffern hat, d. h. zwischen 10000 und 100000 fällt.

§. 23. Die Decimalziffern eines Logarithmus heissen die Mantisse des Logarithmus. Z. B. bey dem Logarithmus 5,3286594 ist 5 die Kennziffer, und die übrigen Ziffern sind die Mantisse, und bei dem Logarithmus 0,8450980 ist Null die

Kennziffer, und die übrigen Ziffern sind die Mantisse.

§. 24. Wenn zur Kennziffer eines gegebenen Briggischen Logarithmus eine Eins addirt wird, so erhält man einen Logarithmus, der zu einer Zahl gehört, die das Zehnfache derjenigen Zahl ist, zu welcher der gegebene Logarithmus gehört. Z. B. der gegebene Briggische Logarithmus sey 2,7951846, zu welchem die Zahl 624 gehört. Nun addire man 1 zu seiner Kennziffer 2, so gehört der Logarithmus 3,7951846 zur Zahl 6240, welche das Zehnfache von 624 ist. Denn das zur Kennziffer des gegebenen Logarithmus addirte 1 ist zu betrachten als der Briggische Logarithmus von 10. Also wird eigentlich der log. 10 zum gegebenen Logarithmus addirt, folglich ist die Summe dieser Logarithmen gleich den Logarithmus des Products der zu diesen Logarithmen gehörigen Zahlen (§. 11.), oder man erhält den Logarithmus von 10mal 624.

§. 25. Auf ähnliche Art läßt sich zeigen, daß wenn man 2 (als Briggischer Logarithmus von 100 betrachtet,) zur Kennziffer eines gegebenen Briggischen Logarithmus addirt, die Summe einen Logarithmus giebt, der zu einer Zahl gehört, welche das Hundertfache der Zahl ist, die zu dem gegebenen Logarithmus gehört.

Z. B. $1,7993405 = \log.\ 63$
addirt $2 = \log. 100$

$3,7993405 = \log.\ 63 \cdot 100 = \log. 6300.$

§. 26.

§. 26. Eben so, da 2,8825245 = log. 763
addirt 3 = log. 1000

Summe 5,8825245 =
log. 763. 1000 = log. 763000

§. 27. Wenn man aber von der Kennziffer eines gegebenen Briggischen Logarithmus eine Eins subtrahirt, so erhålt man einen Logarithmus, der zu einer Zahl gehört, welche der zehnte Theil der zum gegebenen Logarithmus gehörigen Zahl ist. Denn das subtrahirte 1 ist zu betrachten als Briggischer log. 10, folglich ist der Rest dem Logarithmus desienigen Quotienten gleich, der entsteht, wenn man die Zahl des gegebenen Logarithmus mit 10 dividirt (§. 14.). Z. B.

3,9164539 = log. 8250
subtrah. 1 = log. 10

Rest 2,9164539 = log. $\frac{8250}{10}$ = log. 825

Eben so, da 3,6869043 = log. 4863
so ist 2,6869043 = log. 486,3
ferner 1,6869043 = log. 48,63
und 0,6869043 = log. 4,863

§. 28. Ueberhaupt, wenn man n Einer zur Kennziffer k eines gegebenen Briggischen Logarithmus, der zur Zahl b gehört, addirt, so giebt die Summe den Briggischen Logarithmus eines Products, das entsteht, wenn die Zahl b mit einer ganzen Zahl, die aus einer Einheit und daran befindlichen n Nullen zusammengesetzt ist, multipli-

cirt

cirt wird, und wenn man n Einer von der Kennziffer k subtrahirt, so giebt der Rest den Briggischen Logarithmus eines Quotienten, der entsteht, wenn man b mit einer ganzen Zahl, die aus einer Einheit und daran befindlichen n Nullen zusammengesetzt ist, dividirt.

§. 29. Man darf also, wenn eine gewisse Anzahl Einer von der Kennziffer k eines gegebenen Briggischen Logarithmus subtrahirt worden sind, nur von derjenigen Zahl, die zu diesem gegebenen Logarithmus gehört, so viele Ziffern von der Rechten zur Linken abzählen, als die Zahl n, welche man von der Kennziffer k subtrahirte, Einer enthält, die abgezählten Ziffern sind die Decimalziffern eines Decimalbruchs.

§. 30. In dem Briggischen System verhalten sich die Differenzen von drey einander nahe kommenden großen Zahlen beinahe wie die Differenzen der Logarithmen, welche zu diesen Zahlen gehören. Z. B. Es seien die Zahlen 8472, 8473 und 8474, so ist die erste von der zweiten um 1 unterschieden, und die erste von der dritten um 2. Nun ist der Briggische Logarithmus von 8472 = 3,9279859, von 8473 = 3,9280372 und von 8474 = 3,9280885. Man subtrahire den ersten Logarithmus von dem zweiten und dritten.

3,9280372	3,9280885
3,9279859	3,9279859
0,0000513	0,0001026

Es

Es verhält sich also die erste log. Differenz zur zweiten, wie 0,0000513 zu 0,0001026, d. i. wenn man beide Glieder des Verhältnisses mit 10000000 multiplicirt, wie 513 zu 1026 oder wie 1 zu 2, oder eigentlich nur beinahe wie 1 zu 2, (denn obgleich 1026 wirklich das Doppelte von 513 ist, so muß doch darauf Rücksicht genommen werden, daß die mehrsten der in der Tabelle befindlichen Logarithmen nur Stücken der eigentlichen Logarithmen sind, und daß oft die letzte Decimalziffer unrichtig angegeben ist (§. 18.), nun war die Differenz der ersten und zweiten Zahl = 1, und die der ersten und dritten Zahl = 2, also verhält sich die erste Zahlendifferenz zur zweiten wie 1 zu 2. Folglich verhalten sich diese Zahlendifferenzen beinahe wie die logarithmischen Differenzen, oder wenn die erste Zahlendifferenz = 1, die zweite = w, die erste log. Differenz = D und die zweite = d, so verhält sich 1 : w = D : d.

§. 31. Daher kann man, wenn zwei große Zahlen, deren Unterschied = 1 ist, und ihre Briggischen Logarithmen gegeben sind, den Briggischen Logarithmus einer Zahl finden, die zwischen die gegebenen Zahlen fällt. Z. B. Wenn die Briggischen Logarithmen der Zahlen 8472 und 8473 gegeben sind, den Briggischen Logarithmus der Zahl $8472\frac{3}{5}$ zu finden.

Die Differenz der Zahlen 8473 und 8472 ist = 1, die Differenz w der Zahlen $8472\frac{3}{5}$ und 8472 ist $\frac{3}{5}$, nun ist in der Tabelle

log.

$$\log. 8473 = 3{,}9280372$$
$$\log. 8472 = 3{,}9279859$$
Die 1ste log. Diff. D = 0,0000513

Da nun $1 : w = D : d$, so schliese man

$$1 : \tfrac{3}{5} = 0{,}0000513 : d$$

$$\begin{array}{r} 0{,}0000513 \\ 3 \\ \hline 5)\ 0{,}0001539 \\ \hline 0{,}0000307 = d \end{array}$$

Diese zweite log. Differenz d addire man zum Log. der kleinern gegebenen Zahl

$$\begin{array}{r} 3{,}9279859 \\ 0{,}0000307 \\ \hline 3{,}9280166 \end{array}$$

so ist der gefundene Logarithmus der Briggische Logarithmus von $8472\tfrac{3}{5}$. Diese Rechnung läßt sich auf folgende Art abkürzen.

$$\begin{array}{rr} \log. 8473 = & 3{,}9280372 \\ \log. 8472 = & 3{,}9279859 \\ \hline & 513 \\ & 3 \\ \hline & 5)\ 1539 \\ \hline & 307 \\ & 3{,}9279859 \\ \hline \log. 8472\tfrac{3}{5} = & 3{,}9280166 \end{array}$$

§. 32. Folglich kann man auch im Briggischen System, wenn zwei Logarithmen, deren Kennziffer 3, oder 4 oder noch grösser ist, nebst den zu ihnen gehörigen Zahlen, deren Unterschied 1 gegeben sind, die Zahl finden, die zu einem Logarithmus gehört, der zwischen die beiden Zahlen fällt. Z. B. Es seien die Logarithmen 3,9279859 = A und 3,9280372 = B, und die zu ihnen gehörigen Zahlen 8472 und 8473, die um 1 unterschieden sind, gegeben, und man sucht die Zahl, die zu dem Logarithmus 3,9280166 = C der zwischen die beiden gedachten Logarithmen fällt. Man subtrahire den kleinern Logarithmus A so wohl vom grössern B, als auch vom Logarithmus C, so erhält man die logarithmischen Differenzen D und d, dann schliese man nach §. 30. D : d = 1 : w, uud addire die gefundene Zahlendifferenz w zu der Zahl, die zu dem kleinern Logarithmus A gehört, so hat man die gesuchte Zahl. Nemlich

```
 3,9280372      3,9280166
 3,9279859      3,9279859
 ---------     ----------
 D = 513      |    3070|0,598 = w
              |    2565|
                  -----
                   5050
                   4635
                  -----
                   4150
```

Die

Die Zahl die zu dem kleinern Logarithmus A gehört, ist 8472

dazu addirt	0,598
gesuchte Zahl	8472,598

oder fast $8472\frac{6}{10}$ das ist $8472\frac{3}{5}$.

Der Grund dieses Verfahrens ist im §. 30. angegeben, nur ist noch zu erinnern, daß man den Proportionaltheil w nicht weiter als auf drey Ziffern sucht, denn weil diese Proportion nur beinahe wahr ist (§. 30.), so ist es unnütz, noch mehrere Decimalziffern zu berechnen.

§. 33. Bei der logarithmischen Rechnung ist eine Tabelle nöthig, in der die Briggischen Logarithmen für alle ganze Zahlen von 1 bis 10000 und noch weiter zusammengetragen und geordnet sind. Es giebt eine beträchtliche Menge solcher Tafeln. Ich will hier blos einige von den wohlfeilen Handausgaben anführen, und bemerke dabei, daß alle logarithmischen Tafeln zugleich bei trigonometrischen Rechnungen gebraucht werden können, weil sie nicht nur die Logarithmen der natürlichen ganzen Zahlen, sondern auch der trigonometrischen Linien enthalten, ausser solche Tafeln, die für einen besondern Zweck, z. B. blos für Handelsrechnungen eingerichtet sind, wie die Tafeln von Girtanner, welche aber nicht hieher gehören, weil ihr Gebrauch zu eingeschränkt ist, und ihre ganze Einrichtung dem besondern Zweck angemessen ist. Die brauchbarsten und wohlfeilsten

sten Handausgaben der logarithmischen Tafeln sind folgende: Zu der Trigonometrie und Ausziehung der Wurzeln nöthige Tafeln, nebst den Logarithmen der gemeinen Zahlen, von Christian Freiherrn von Wolf. Von diesen Tabellen sind mehrere Auflagen erschienen. — Tafeln der Logarithmen ꝛc. von Adrian Blacq, sind oft aufgelegt worden, unter andern neu herausgegeben von Ebert, 1771, ingleichen bearbeitet von Hentsch, die neue Auflage von 1775. Frankfurt und Leipzig, bei Fleischer. — Ferner Tafeln der Sinusse, Tangenten und Secanten mit ihren Logarithmen, nebst den Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 bis 20000, Wien 1777. (Diese Tafel ist eigentlich eine von dem Major Unterberger und Oberlieutenant Pichler besorgte neue Ausgabe der Tables des Sinus par Mr. Rivard. Paris 1743.) — Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer und anderer zum Gebrauch der Mathematik dienlicher Tafeln, von Johann Carl Schulz, Berlin, 1778. — Endlich, Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, anstatt der kleinen Blacqischen, Wolfischen ꝛc. Tafeln, für die Mathematikbeflissenen eingerichtet von G. Vega, zweite Auflage. Leipzig in der Weidmannischen Buchhandlung 1800. (Diese Tabelle ist wohlfeil, sie kostet 2 fl. 45 kr. und ist sehr correct und bequem eingerichtet. Man muß aber

den

den hier angegebenen Titel dem Buchhändler genau bestimmen, denn es giebt noch zwey Tabellen von Vega, die vollständiger aber auch viel theurer sind, nemlich seine logarithmischen Tafeln in zwei Bänden, und sein thesaurus log.)

§. 34. Von diesen Tabellen haben die Wolfischen und Vlacquischen Tafeln folgende Einrichtung. Jede Seite hat drei verticale Reihen. Jede Reihe ist in zwei Columnen eingetheilt, in der ersten Columne stehen die ganzen Zahlen nach ihrer natürlichen Ordnung abwärts, und neben ihnen rechts in der zweiten Columne die Briggischen Logarithmen dieser ganzen Zahlen untereinander. Diese Einrichtung ist zwar für das Aufsuchen der Logarithmen sehr bequem, nimmt aber vielen Raum ein, daher finden sich in diesen Tabellen nur die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 10000.

Das logarithmische Handbuch von Vega enthält hingegen die Briggischen Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 100000, hat aber eine sparsamere Einrichtung, um den Preis des Buchs nicht zu vertheuern. Im Anfang nemlich stehen die ganzen Zahlen nach der Folge unter einander bis zur Zahl 999 und neben ihnen ihre Logarithmen. Von der Zahl 1000 an, ist iede Seite in zwölf verticale Columnen getheilt, die erste davon links enthält die ganzen Zahlen die zu den Tausenden gehören nach ihrer Folge von oben nach unten herabgezählt. Die zweite Columne

enthält

enthält die drey höchsten Decimalziffern des Logarithmus, nach folgendem Schema:

Zahlen	0		1	2	
2492	396	5480	5655	5829	u. s. f.
2493		7223	7397	7571	
2494		8964	9139	9313	
2495	397	0706	0880	1054	

Die zweite Columne ist auch oben mit 0 bezeichnet, und enthält die vier letzten Decimalziffern eines Logarithmus, so auch die folgenden Columnen, die oben mit 1, 2, 3 u. s. f. bis 9 bezeichnet sind. Hier muß nun der Logarithmus einer Zahl zusammengesetzt werden, seine Mantisse wird nemlich aus den in den Columnen befindlichen Decimalziffern gebildet, seine Kennziffer aber, die nicht in der Tabelle befindlich ist, muß gehörig dazu gesetzt werden. Z. B. Es soll der Logarithmus von 2492 angegeben werden. Man nehme aus der zweiten Columne die Decimalziffern 396 und setze zu ihnen die zunächst befindlichen 5480, so hat man die Mantisse 3965480, vor sie setze man die gehörige Kennziffer 3, so ist 3,3965480 der Logarithmus von 2492. Setzt man statt 3 die Kennziffer 4, so ist 4,3965480 der Logarithmus von 24920 nach §. 24., setzt man aber die Kennziffer 5, so ist 5,3965480 der Logarithmus von 249200 (§. 22. und 24.). Ferner: es soll der Logarithmus der Zahl 2494 gefunden werden. Neben dieser Zahl sind die ersten drei Decimalziffern nicht angegeben, also nehme man

die vorigen 396 herab, und setze die in der nemlichen Columne befindlichen und mit der Zahl 2494 in einer horizontalen Linie stehenden vier Decimalziffern 8964 dazu, und die gehörige Kennziffer 3 voran, so ist 3,3968964 der Logarithmus von 2494. Wenn der Logarithmus der Zahl 24952 angegeben werden soll, so lasse man von dieser Zahl die letzte Ziffer 2 weg, und suche blos die Zahl 2495 auf, schreibe die neben solcher stehenden drey Decimalziffern 397 heraus, betrachte die vierte Columne, (weil diese oben mit 2 bezeichnet, und die letzte weggelassene Ziffer der gegebenen Zahl auch 2 ist), schreibe die in derselben befindlichen und mit der Zahl 2495 in der nemlichen horizontalen Linie stehenden vier Decimalziffern 1054 heraus und setze sie neben die drey ersten, so hat man die Mantisse 3971054, davor setze man die Kennziffer 4, (weil die gegebene Zahl 24952 fünf Ziffern hat), so ist 4,3971054 der Briggische Logarithmus von 24952. Wenn in Vega's Tabelle die vier letzten Decimalziffern mit einem Sternchen bezeichnet sind, so muß man nicht die drey ersten Decimalziffern, die bei einer vorhergehenden Zahl stehen, sondern die drei ersten Decimalziffern nehmen, welche bei der folgenden Zahl stehen. Z. B. Das nach der Tabelle eingerichtete Schema ist:

Zahlen		0	1	2	3	
9482	976	9000	9045	9091	9137	
9483		9458	9503	9549	9595	u. s. f.
9484		9915	9961	*0007	*0053	
9485	977	0373	0419	0465	0511	

Nun

Nun setze ich, es soll der Logarithmus von 94843 angegeben werden. Die Mantisse des Logarithmus von 9484 ist = 9769915, da aber die letzte Ziffer der gegebenen Zahl eine 3 ist, so müssen in dieser Mantisse statt 9915 die in der fünften oben mit 3 bezeichneten Columne befindlichen vier Decimalziffern 0053 genommen werden, so wäre also die Mantisse des Logarithmus von 94843 = 9760053. Allein diese Mantisse wäre kleiner als die vorige, deswegen müssen, statt der ersten drey Decimalziffern 976, die folgenden, bey der Zahl 9485 stehenden ersten drey Decimalziffern 977 genommen werden, deswegen sind in der Tabelle die vier Decimalciffern 0053 mit * bezeichnet. Also ist die gehörige Mantisse 9770053, davor die Kennziffer 4 gesetzt, weil die gegebene Zahl 94843 fünf Ziffern hat, giebt 4,9770053 als den Logarithmus von 94843.

Die logarithmischen Tafeln von Joh. Carl Schulz sind auf ähnliche Art eingerichtet.

§. 35. Da die Briggischen Logarithmen in den Tabellen für ganze Zahlen angegeben sind, aber nicht für gemischte Zahlen und für Brüche, und überdieß in den mehresten Tabellen nur für alle ganzen Zahlen von 1 bis 10000, so können bei Rechnungen Fälle vorkommen, da man entweder die Zahl oder den Logarithmus nicht in der Tabelle findet, und also das eine oder das andere aus den vorhandenen Logarithmen selbst berechnen muß. Die Verfahrungsart wird in den folgen-

den Paragraphen, so wohl für die Wolfischen und Vlacqischen, als für die Vega'schen Tafeln gezeigt. Dabey ist zu bemerken, daß in diesen Paragraphen blos von den Briggischen Logarithmen die Rede ist.

§. 36. Den Logarithmus eines unächten Bruchs zu finden.

Man subtrahire den Logarithmus des Nenners von dem Logarithmus des Zählers, so ist der Rest der gesuchte Logarithmus.

Z. B. Den log. $\frac{732}{23}$ zu finden.

$$\begin{array}{rl} \log. 732 = & 2,8645111 \\ \log. 23 = & 1,3617278 \\ \hline & 1,5027833 \end{array}$$

Also ist der Logarithmus von $\frac{732}{23} = 1,5027833$.

Denn der Bruch $\frac{732}{23}$ ist soviel als der Quotient, wenn 732 mit 23 dividirt wird, also ist der Logarithmus von $\frac{732}{23}$ so viel als der Logarithmus eines Quotienten. Diesen Logarithmus erhält man aber, wenn man von dem Logarithmus des Dividends 732 den Logarithmus des Divisors 23 subtrahirt (§. 14).

Exempel zur Uebung.

1) Wie ist der Logarithmus von $\frac{18}{7}$?
Antw. 0,4101745.

2) Wie ist der Logarithmus von $\frac{356}{9}$?
Antw. 1,5972075.

3) Wie

3) Wie ist der Logarithmus von $\frac{6437}{16}$?
Antw. 2,6045635.

4) Wie ist der Logarithmus von $\frac{7459}{365}$?
Antw. 1,3103877.

§. 37. Den Logarithmus einer gemischten Zahl zu finden.

Erster Fall. Wenn die gemischte Zahl nicht groß ist, d. h. zu den Einern oder Zehnern gehört, so verwandle man sie in einen unächten Bruch, und suche dessen Logarithmus (§. 36.), so hat man den Logarithmus der gemischten Zahl.

Z. B. Den Logarithmus von $13\frac{5}{6}$ zu finden. Die gemischte Zahl $13\frac{5}{6}$ ist $= \frac{83}{6}$.

$$\begin{array}{rl} \log. 83 & = 1,9190781 \\ \log. 6 & = \underline{0,7781513} \\ \log. \frac{83}{6} \text{ oder } \log. 13\frac{5}{6} & = 1,1409268 \end{array}$$

Exempel zur Uebung.

1) Wie ist der Logarithmus von $46\frac{2}{3}$?
Antw. 1,6690067.

2) Wie ist der Logarithmus von $8\frac{5}{16}$?
Antw. 0,9197316.

3) Wie ist der Logarithmus von $316\frac{3}{4}$?
Antw. 2,5007166.

Zweiter Fall. Wenn der Bruch, der sich an der ganzen Zahl befindet, ein Decimalbruch ist, z. B. Wenn die gemischte Zahl 57,3 ist, so be-

trachte man sie als ganze Zahl, suche also in der Tabelle den Logarithmus von 573 auf, gebe ihm aber die Kennziffer 1, weil die ganze Zahl 57 aus zwei Ziffern besteht (§. 9. 22. und 27.). Die Berechnung ist folgende:

$$\log. 573 = 2{,}7581546$$

$$\text{also } \log. 57{,}3 = 1{,}7581546$$

Ferner, den Logarithmus von 8,375 zu finden.

$$\log. 8375 = 3{,}9229848$$

$$\text{also } \log. 8{,}375 = 0{,}9229848$$

Exempel zur Uebung.

1) Wie ist der Logarithmus von 16,34?
Antw. 1,2132521.

2) Wie ist der Logarithmus von 7,3?
Antw. 0,8633229.

3) Wie ist der Logarithmus von 123,7?
Antw. 2,0923697.

Dritter Fall. Wenn die gemischte Zahl zu den Tausenden gehöret, so wende man die Rechnung mit den Proportionaltheilen, die im §. 31. gezeigt wurde, an. Z. B. Den Logarithmus von $3482\frac{5}{8}$ zu finden.

log.

$$\begin{array}{r} \log.\ 3483 = 3{,}5419535 \\ \log.\ 3482 = 3{,}5418288 \\ \hline 1247 \\ 5 \\ \hline 8)6235 \\ \hline 779 \\ 3{,}5418288 \\ \hline \log.\ 3482\tfrac{5}{8} = 3{,}5419067 \end{array}$$

Den Logarithmus von 1624,36 zu finden.

$$\begin{array}{r} \log.\ 1625 = 3{,}2108534 \\ \log.\ 1624 = 3{,}2105860 \\ \hline 2674 \\ 0{,}36 \\ \hline 16044 \\ 8022 \\ \hline 962{,}64 \\ 3{,}2105860 \\ \hline 3{,}2106822 = \log.\ 1624{,}36 \end{array}$$

Vermittelst Vega's Tabellen, kann man dieses Exempel noch leichter berechnen. Man setze nemlich den Logarithmus von 16243 zusammen, so ist dessen Mantisse

2106662

nun, da die letzte Ziffer der gegebenen Zahl 6 ist, so suche man in der Tabelle, auf der nemlichen Seite, wo 16243 steht, zu äusserst rechter Hand unter den Proportionaltheilen, die oben mit P. P.

(welche Buchstaben partes proportionales bedeuten,) bezeichnet sind, die Zahl 6 auf, so steht daneben 160, diese Ziffern addire man unter die letzten Ziffern der Mantisse, und setze, da die gegebene ganze Zahl 1624 ist, die Kennziffer 3 vor.

$$\begin{array}{r} 2106662 \\ 160 \\ \hline 3,2106822 \end{array} = \text{log. } 1624,36$$

Den Logarithmus von 384,587 zu finden. Dieses Beispiel gehört eigentlich zu dem zweiten Fall. Allein wenn man die gemischte Zahl 384,587 als ganze Zahl 384587 betrachtet, so übersteigt sie die kleinern Tabellen. Folglich kann man nur 3845 als ganze Zahl betrachten. Nun ist

$$\begin{array}{lr} \text{log. } 3846 = & 3,5850093 \\ \text{log. } 3845 = & 3,5848963 \\ \hline & 1130 \\ & 0,87 \\ \hline & 7910 \\ & 9040 \\ \hline & 983,10 \\ & 3,5848963 \\ \hline & 3,5849946 = \text{log. } 3845,87 \\ \text{folglich} & 2,5849946 = \text{log. } 384,587 \end{array}$$

Vermittelst Vega's Tabellen, findet man diesen Log. noch leichter. Man setze nemlich, wie im

vorigen Beispiel gezeigt wurde, den Logarithmus von 384587 zusammen, nemlich

5849867 als Mantisse des log. 38458
79 als Proportionaltheil von 7

2,5849946 = log. 384,587

Den Logarithmus von 6254,368 zu finden.

log. 6255 = 3,7962273
log. 6254 = 3,7961579

694
0,368

5552
4164
2082

255,392
3,7961579

3,7961834 = log. 6254,368

Vermittelst der Vega'schen Tafeln kann man auch dieses Exempel leichter berechnen. Man betrachte 6254,368 als wäre solche die ganze Zahl 6254368, und da sie mehr als sechs Ziffern hat, so lasse man die letzte Ziffer 8 weg, und setze den Logarithmus von 625436 zusammen.

7961787 Mantisse für log. 62543
42 Proportionaltheil für 6
5 Proportionaltheil für die letzte Ziffer 8

3,7961834 = log. 6254,368

Der

Der letzte Proportionaltheil für die Ziffer 8 wird so gefunden. Man sucht ihn unter eben den Proportionaltheilen, aus welchen man die 42 für die Ziffer 6 nahm. Sucht man nun hier 8 auf, so steht dabey 56, dieser Proportionaltheil müßte genommen, und so unter den vorigen geschrieben werden, daß man um eine Stelle rechts heraus rückt, so daß die Ziffer 6 von 56 in die achte Decimalstelle des Logarithmus der Summe zu stehen käme. Weil man aber hier nur Logarithmen mit sieben Decimalziffern gebraucht, so wird die 6 weggelassen und nur die 5 angesetzt.

Wenn der Logarithmus von folgender gemischten Zahl 3814,56734 gesucht werden soll, so kann man diesen vermittelst der gewöhnlichen Tafeln, in denen die Logarithmen nur sieben Decimalziffern haben, nicht genau finden, auch haben die letzten zwei Decimalziffern der gegebenen Zahl, meistens erst auf die achte und neunte Decimalstelle des Logarithmus Einfluß. Man lasse also die genannten beiden Decimalziffern 34 weg, und suche blos den Logarithmus von 3814,567 auf die Art, wie im vorigen Beispiel gerechnet wurde, so findet man $\log. 3814,567 = 3,5814452$.

Man kann auch die Logarithmen solcher gemischten Zahlen, deren Bruch ein gewöhnlicher Bruch ist, finden, wenn man diesen Bruch in einen Decimalbruch verwandelt, und übrigens auf die eben gezeigte Art verfährt. Z. B. Den Logarithmus von $46\frac{3}{4}$ zu finden. Da $\frac{3}{4} = 0,75$

ist,

ist, so ist $46\frac{3}{4} = 46,75$. Man betrachte diese Zahl als die ganze Zahl 4675, suche ihren Logarithmus in der Tabelle auf, dieser ist 3,6697816 und ändere seine Kennziffer, oder setze vor der Mantisse 6697816 die Kennziffer 1, weil die Zahl 46 aus zwei Ziffern besteht, so ist 1,6697816 $= \log. 46,75$ oder $= \log. 46\frac{3}{4}$.

Exempel zur Uebung.

1) Wie ist der Logarithmus von 2954,68? Antw. 3,4705104.
2) Wie ist der Logarithmus von 4389,734? Antw. 3,6424381.
3) Wie ist der Logarithmus von 6107,3? Antw. 3,7858492.
4) Wie ist der Logarithmus von 7854,51637? Antw. 3,8951194.
5) Wie ist der Logarithmus von 314,5386? Antw. 2,9476739.
6) Wie ist der Logarithmus von 28,317? Antw. 1,4520472.

§. 38. Den Logarithmus einer ganzen Zahl zu finden, welche größer ist, als die in der Tabelle befindlichen Zahlen.

Hier lassen sich zwei Fälle unterscheiden.

Erster Fall. Wenn sich die gegebene ganze Zahl durch andere ganze Zahlen so dividiren läßt, daß die Quotienten solche ganze Zahlen werden,

den, die in der Tabelle stehen. Man suche die Logarithmen dieser Quotienten in der Tabelle auf, und addire sie, so giebt die Summe den Logarithmus der gesuchten Zahl. Denn die gedachten Quotienten bringen, wenn sie mit einander multiplicirt werden, die gegebene Zahl hervor, also findet man den Logarithmus der gegebenen Zahl, wenn man die Logarithmen dieser Quotienten addirt (§. 11. und 12.). Z. B. Den Logarithmus der Zahl 450296 zu finden:

8)450296
7) 56287
8041

Also ist 8. 7. 8041 = 450296 aber 8. 7 = 56 also 56. 8041 = 450296, folglich addirt man die Logarithmen von 56 und 8041, welche beide in den Tabellen stehen.

log. 56 = 1,7481880
log. 8041 = 3,9053101
log. 450296 = 5,6534981

Exempel zur Uebung.

1) Wie ist der Logarithmus von 53964? Antw. 4,7321041.

2) Wie ist der Logarithmus von 2587095? Antw. 6,4128124.

3) Wie ist der Logarithmus von 171096? Antw. 5,2332398.

Zweiter Fall. Wenn sich die gegebene Zahl nicht so dividiren läßt, daß der Quotient eine ganze Zahl ist, die sich in der Tabelle befindet. Man verfahre zuerst wie im dritten Fall des §. 37. d. h. man betrachte die gegebene Zahl als einen Decimalbruch, dessen ganze Zahl zu den Tausenden gehört, suche den Logarithmus dieses Decimalbruchs, und gebe ihm die für die gegebene Zahl gehörige Kennziffer.

Z. B. Den Logarithmus der Zahl 99317 zu finden. Man schneide von der Rechten zur Linken so viele Ziffern ab, daß linker Hand eine Zahl steht, die man in der Tabelle finden kann. (Hier braucht man also nur eine Ziffer abzuschneiden, wäre aber die gegebene Zahl 295627, so müßten zwei Ziffern, und von der Zahl 3297589 müßten drei Ziffern von der Rechten zur Linken abgeschnitten werden), nun suche man den Logarithmus von 9931,7 (nach §. 37. dritter Fall), nemlich

$$\begin{aligned} \log.\ 9932 &= 3{,}9970367 \\ \log.\ 9931 &= \underline{3{,}9969930} \\ &\phantom{=3{,}9969}437 \\ &\phantom{=3{,}99699}\underline{0{,}7} \\ &\phantom{=3{,}9969}305{,}9 \\ &\underline{3{,}9969930} \\ \log.\ 9931{,}7 &= 3{,}9970235 \\ \text{also } \log.\ 99317 &= 4{,}9970235 \end{aligned}$$

Den Logarithmus der Zahl 295627 zu finden. Man schneide in ihr zwei Ziffern ab, und

suche

suche den Logarithmus von 2956,27 (nach §. 37. dritten Fall), dieser wird seyn 3,4707440, da nun aber die ganze Zahl 295627 sechs Ziffern hat, so muß die Kennziffer 5 seyn, also ist 5,4707440 = log. 295627.

Diese Berechnungsart kann auch bei dem ersten Fall gebraucht werden, besonders wenn man nicht sogleich die Theiler der gegebenen Zahl übersieht.

Vermittelst Vega's Tabellen findet man den Logarithmus einer ieden ganzen Zahl von 1000 an bis zu den ganzen Zahlen mit sieben Ziffern, durch bloße Zusammensetzung des Logarithmus, wie schon im §. 37. gezeigt wurde.

Z. B. Vermittelst Vega's Tabellen den Logarithmus von 3297589 zu finden:

5181848 Mantisse von log 32975
105 Proportionaltheil für die Ziffer 8.
11 Proportionaltheil für die Ziffer 9.

6,5181964 = log. 3297589.

Wenn eine gegebene Zahl mehr als sieben Ziffern hat, so reichen die gewöhnlichen Tabellen, in denen die Logarithmen nur auf sieben Decimalstellen angegeben sind, nicht hin, um den Logarithmus der gegebenen Zahl genau zu bestimmen. Alsdann kann man blos auf folgende Art verfahren. Z. B. Den Logarithmus von 211631616 zu finden. Da diese Zahl neun Ziffern hat, so lasse man die

letzten

letzten beiden weg, und suche den Logarithmus von 2116316 auf die vorhin gezeigte Art, so findet man ihn = 6,3255805, da aber die gegebene Zahl neun Ziffern hat, so muß die Kennziffer 8 werden, folglich ist 8,3255805 beinahe der Logarithmus der gegebenen Zahl, eigentlich aber gehört zu der gegebenen Zahl 211631616 der Logarithmus 8,325580548185 u. s. f. den ich aus den im §. 17. angegebenen Logarithmen berechnet habe, indem ich die ganze Zahl 211631616 in ihre Factoren zerlegte.

Nemlich, so wie die Logarithmen der Zahlen 5483,5484 u. s. f. bis 5495 die drey ersten Decimalziffern gemeinschäftlich haben, und bei den Logarithmen der Zahlen 9984,9985 und 9986 die vier ersten Decimalziffern einerlei sind, eben so hat der Logarithmus von 211631616, mit mehreren der nächst vorhergehenden und noch mehreren der folgenden Logarithmen die sieben ersten Decimalziffern gemein. Ueberhaupt haben mehrere auf einander folgende Logarithmen immer mehrere von den ersten Decimalziffern der Mantisse gemein, je größer die Zahlen werden, zu denen die Logarithmen gehören.

Exempel zur Uebung.

1) Wie ist der Logarithmus von 36753?
Antw. 4,5652927.

2) Wie ist der Logarithmus von 432971?
Antw. 5,6364588.

3) Wie ist der Logarithmus von 6483597? Antw. 6,8117159.

4) Wie ist der Logarithmus von 27346801? Antw. Beinahe 7,4369065.

§. 39. Den Logarithmus eines ächten Bruchs zu finden.

1) Wenn der gegebene ächte Bruch ein Decimalbruch ist. Man betrachte seine Decimalziffern als eine ganze Zahl, suche den Logarithmus derselben in der Tabelle, und subtrahire von diesem Logarithmus eine Kennziffer, die aus so vielen Einern besteht, als der gegebene Decimalbruch Decimalstellen hat.

Z. B. Den Logarithmus des Decimalbruchs 0,0378 zu finden. Wenn man die Decimalziffern dieses Bruchs als ganze Zahl betrachtet, so ist solche 378, der Logarithmus von 378 ist 2,5774918. Ferner, da der gegebene Bruch 0,0378 vier Decimalstellen hat, so subtrahire man die Kennziffer 4 von diesem Logarithmus, oder deute wenigstens diese Subtraction an, so ist 2,5774918 — 4 der gesuchte Logarithmus. Denn 0,0378 ist so viel als $\frac{378}{10000}$, oder 378 dividirt mit 10000, also ist der Logarithmus von 0,0378 = log. 378 — log. 10000 (§. 14.); der Logarithmus von 10000 ist aber = 4, folglich ist log. 0,0378 = log. 378 — 4. Nun findet sich in der Tabelle log. 378 = 2,5774918, also ist

$$\log. 0{,}0378 = 2{,}5774918 - 4.$$

Wenn

Wenn man die Subtraction verrichten will, so muß man, (weil der Subtrahend größer ist, als der Minuend,) 2,5774919 von 4 subtrahiren, und die gefundene Differenz als negativ betrachten, d. i.

$$\begin{array}{r} 4, \\ 2,5774918 \\ \hline -\ 1,4225082 = \log.\ 0,0378 \end{array}$$

Nemlich in dem Briggischen System sind die Logarithmen der ächten Brüche negativ.

Es ist aber für die logarithmische Rechnung oft bequemer, die Subtraction blos anzudeuten, und dem Logarithmus von 0,0378 die Form 2,5774918 — 4 zu geben, oder auch diese 0,5774918 — 2, indem man von den Kennziffern 2 und 4 einerlei Zahl abzieht.

Den Logarithmus von 0,7318 zu finden. Es findet sich in der Tabelle log. 7318 = 3,8643924, und da der gegebene Decimalbruch 0,7318 vier Decimalstellen hat, so ist 3,8643924—4 oder 0,8643924 — 1 der gesuchte Logarithmus.

Den Logarithmus von 0,0065349 zu finden. Man findet vermittelst der Tabelle und des §. 38. den log. 65349 = 4,8152389, und da der gegebene Decimalbruch 0,0065349 sieben Decimalstellen hat, so ist 4,8152389 — 7 oder 0,8152389—3 der gesuchte Logarithmus.

2) Wenn der gegebene ächte Bruch ein gewöhnlicher Bruch ist, z. B. $\frac{5}{8}$, so subtrahire man

den Logarithmus des Zählers von dem Logarithmus des Nenners, und betrachte die gefundene Differenz als negativ, so ist diese der Logarithmus des gegebenen ächten Bruchs. Nemlich

$$\begin{array}{rl} \log. 8 = & 0,9030900 \\ \log. 5 = & 0,6989700 \\ \hline \log. \frac{5}{8} = & -0,2041200 \end{array}$$

Denn $\frac{5}{8}$ ist so viel als 5 dividirt mit 8, folglich findet man den Logarithmus von $\frac{5}{8}$, wenn man den log. 8 von log. 5 subtrahirt, (§. 14) aber log. 8 ist größer als log. 5, folglich subtrahire man log. 5 vom log. 8 und betrachte die Differenz als negativ. Man kann aber den Logarithmus eines gewöhnlichen ächten Bruchs auch vermittelst der vorhin gezeigten Verfahrungsart finden, wenn man den Bruch in einen Decimalbruch verwandelt. Z. B. man verwandele $\frac{5}{8}$ in einen Decimalbruch, so ist dieser = 0,625. Nun suche man den Logarithmus dieses Decimalbruchs, dieser ist

2,7958800 — 3 oder 0,7958800 — 1

Will man den obigen negativen Logarithmus haben, so subtrahire man 2,7958800 von 3, oder 0,7958800 von 1, und nehme die Differenz negativ.

$$\begin{array}{r} 3, \\ 2,7958800 \\ \hline -0,2041200 = \log. \frac{5}{8} \end{array}$$

Exem-

Exempel zur Übung.

1) Wie ist der Logarithmus von 0,7?
Antw. 0,8450980—1
2) Wie ist der Logarithmus von 0,07?
Antw. 0,8450980—2
3) Wie ist der Logarithmus von 0,007?
Antw. 0,8450980—3
4) Wie ist der Logarithmus von 0,68?
Antw. 1.8325089—2 oder 0,8325089—1
5) Wie ist der Logarithmus von 0,381?
Antw. 2,5809250—3 oder 0,5809250—1
6) Wie ist der Logarithmus von 0,5634?
Antw. 3,7508168—4 oder 0,7508168—1
7) Wie ist der Logarithmus von 0,08395?
Antw. 3,9240207—5 oder 0,9240207—2
8) Wie ist der Logarithmus von 0,41368?
Antw. 4,6166645—5 oder 0,6166645—1
9) Wie ist der Logarithmus von 0,738467?
Antw. 5,8683310—6 oder 0,8683310—1
10) Wie ist der Logarithmus von 0,0003684?
Antw. 3,5663196—7 oder 0,5663196—4
11) Wie ist der Logarithmus von $\frac{3}{4}$?
Antw. 0,8750613—1 oder — 0,1249387
12) Wie ist der Logarithmus von $\frac{11}{16}$?
Antw. 0,8372727—1 oder — 0,1627273

§. 40. Die Zahl zu finden, die zu einem Logarithmus gehört, der sich in der Tabelle nicht befindet.

Hier sind bei dem Gebrauch der Wolfischen und Vlacqischen Tafeln, drei Fälle zu unterschei-

den, nemlich ob die Kennziffer des gegebenen Logarithmus kleiner als 3, oder 3 selbst, oder größer als 3 ist.

Erster Fall. Wenn die Kennziffer des gegebenen Logarithmus kleiner als 3 ist, so stelle man sich vor, sie sey 3, und suche den gegebenen Logarithmus mit dieser Kennziffer in der Tabelle auf. Da nemlich in der Tabelle nur neun Logarithmen mit der Kennziffer 0, 90 Logarithmen mit der Kennziffer 1, 900 Logarithmen mit der Kennziffer 2, aber 9000 Logarithmen mit der Kennziffer 3 sind, so ist es wahrscheinlicher, den gegebenen Logarithmus mit der Kennziffer 3, als mit einer kleinern in der Tabelle zu finden. Findet man nun unter den Logarithmen der Tabelle einen, der mit dem gegebenen einerlei, oder wenigstens nicht beträchtlich von ihm verschieden ist, so schreibe man die dazu gehörige Zahl heraus. Hierauf nehme man auf die wirkliche Kennziffer des gegebenen Logarithmus Rücksicht, und bestimme aus der Anzahl Einer die sie enthält, wie viele Ziffern die ganze Zahl haben muß, weil nemlich die ganze Zahl eine Ziffer mehr haben muß, als die Anzahl der Einer in der Kennziffer des Logarithmus, der zu dieser Zahl gehört, beträgt. (§. 22.)

Z. B. Welche Zahl gehört zu dem Logarithmus 0,7315486?

Man suche in der Tabelle den gegebenen Logarithmus mit der Kennziffer 3 auf. Nun findet

det sich kein Logarithmus in der Tabelle, der genau 3,7315486 ist, aber der in der Tabelle befindliche 3,7315082 kommt ihm sehr nahe, dabey steht die Zahl 5389, diese schreibe man heraus, und da die Kennziffer des gegebenen Logarithmus 0 ist, so besteht die zu ihr gehörige Zahl nur aus einer Ziffer, folglich ist 5,389 die gesuchte Zahl. Hätte der gegebene Logarithmus die Kennziffer 1, oder wäre er 1,7315486 so wäre 53,89 die gesuchte Zahl: hätte er die Kennziffer 2, oder wäre er 2,7315486 so wäre 538,9 die gesuchte Zahl.

Zweiter Fall. Wenn die Kennziffer des gegebenen Logarithmus selbst 3 ist. Man rechne vermittelst der Proportionaltheile, wie im §. 32 gezeigt wurde.

Z. B. Die Zahl zu finden, die zu dem Logarithmus 3,7583265 gehört.

Man suche diesen gegebenen Logarithmus in der Tabelle auf, und da er sich nicht darinnen befindet, so schreibe man den nächst kleinern und nächst größern Logarithmus, zwischen welche der gegebene fällt, heraus.

Der nächst kleinere Logarithmus ist 3,7583062, der nächst größere 3,7583819, die zu dem nächst kleinern Logarithmus gehörige Zahl ist 5732. Nun

```
3,7583819        3,7583265
3,7583062        3,7583062
---------        ---------
   757        |  2030 | 0,268
              |  1514 |
                 ----
 5732            5160
    0,268        4542
---------        ----
 5732,268 gesuchte Zahl.  6180
```

Vermittelst dieses Verfahrens kann man auch bei dem ersten Fall, wenn die Kennziffer des gegebenen Logarithmus kleiner als 3 ist, die gesuchte Zahl genauer finden. Z. B. Bei dem ersten Fall war die Aufgabe, die Zahl zu finden, die zu dem Logarithmus 0,7315486 gehört, und solche wurde 5,389 gefunden, oder bis auf Tausendtheilchen bestimmt. Will man sie auf noch mehrere Decimalstellen angeben, so schreibe man die nach einander folgenden beiden Logarithmen 3,7315082 und 3,7315888, zwischen welche der gegebene Logarithmus (dessen Kennziffer aber als 3 angenommen wird,) 3,7315486 fällt, und rechne mit den Proportionaltheilen.

```
3,7315888        3,7315486
3,7315082        3,7315082
---------        ---------
   806        |  4040 | 0,501
              |  4030 |
                 ----
                 1000
```

Hierauf setze man den gefundenen Proportionaltheil 0,501 an die Decimalziffern der vor-

hin

hin gefundenen Zahl 5,389 so ist 5,389501 die gesuchte Zahl bis auf 6, Decimalstellen bestimmt.

Dritter Fall. Wenn die Kennziffer des gegebenen Logarithmus größer als 3 ist. Man verfahre wie bei dem zweiten Fall, und rechne mit den Proportionaltheilen, endlich bestimme man die Anzahl der Ziffern, welche die ganze Zahl in Beziehung auf die Kennziffer des gegebenen Logarithmus haben muß. Z. B. Welche Zahl gehört zu dem Logarithmus 5,3967582? Man setze, die Kennziffer des gegebenen Logarithmus sey 3 und rechne so:

```
3,3968964        3,3967582
3,3967223        3,3967223
---------        ---------
     1741        | 3590 | 0,206
  2493           | 3482 |
    0,206        --------
---------          10800
 2493,206
```

Also wäre 2493,206 die gesuchte Zahl, wenn die Kennziffer des gegebenen Logarithmus 3 wäre, da sie aber 5 ist, so ist die gesuchte Zahl 249320,6. Wenn die Kennziffer des gegebenen Logarithmus größer als 6 ist, so läßt sich die zu ihm gehörige Zahl nicht mehr genau vermittelst der Proportionaltheile finden, und es müssen Nullen an sie angehängt werden, um ihr die der Kennziffer des gegebenen Logarithmus entsprechende Anzahl von Ziffern zu geben. Z. B.

Die Zahl zu finden, die zu dem Logarithmus 9,5376851 gehört. Man sieht aus der Kennziffer 9 sogleich, daß die gesuchte ganze Zahl zehn Ziffern haben muß, sieben davon können aber nur vermittelst der Proportionaltheile bestimmt werden, folglich müssen drey Nullen hinzugesetzt werden. Die Berechnung ist übrigens wie die vorige. Man setze, die Kennziffer des gegebenen Logarithmus sey 3.

3,5376932	3,5376851	
3,5375673	3,5375673	
1259	11780	0,935
	11331	
3448	4490	
0,935	3777	
3448,935	7130	

Nemlich 3448,935 wäre die gesuchte Zahl, wenn der gegebene Logarithmus wirklich die Kennziffer 3 hätte, da er aber die Kennziffer 9 hat, so ist 3448935000 die gesuchte Zahl beinahe.

Wenn man Vega's Tabellen gebraucht, so findet man für einen gegebenen Logarithmus die gehörige Zahl durch Zusammensetzung derselben. Man findet nemlich zuerst vier Ziffern für die Einheiten der höchsten Ordnung der Zahl, sodann noch einzeln drei Ziffern, die man nach und nach zu den vier ersten Ziffern rechts hinzusetzt. Endlich bestimmt man die Anzahl der Ziffern der ganzen Zahl, in Beziehung auf die Menge der Einer in der Kenn-

zif-

ziffer des gegebenen Logarithmus, das übrige rechter Hand in der gefundenen Zahl sind Decimalziffern. Z. B. Die Zahl zu finden, die zu dem Logarithmus 3,7583265 gehört. Man lasse die Kennziffer weg, nehme die drei ersten Decimalziffern 758 der Mantisse, und suche solche in der Tabelle. Auf der Seite wo sie stehen, suche man in den Columnen (entweder in einerlei Zeile mit der, wo die 758 stehen, oder meistens unterhalb derselben, bis zu der Zeile, die sich mit 759 anfängt,) die vier letzten Decimalziffern 3265 der Mantisse, da sie nicht selbst dastehen, so nehme man die nächst kleinern 3213, diese befinden sich in der vierten Columne, die oben und unten mit 2 bezeichnet ist, hierauf gehe man von den gefundenen 3213 links in horizontaler Richtung in die erste Columne, in der die Zahlen selbst stehen, dort findet man die Zahl 5732, diese schreibe man heraus, und setze an sie die Ziffer 2, (womit die vierte Columne, in der die vier Decimalziffern 3213 stehen, oben und unten bezeichnet ist,) so hat man die Zahl 57322. Nun subtrahire man von den vier letzten Ziffern der Mantisse des gegebenen Logarithmus 3265, die vier aus der Tabelle genommenen Decimalziffern 3213, den Rest 52 suche man rechts in der Tabelle bei den Proportionaltheilen unter den logarithmischen Differenzen, und da er nicht selbst dort steht, so nehme man die nächst kleinere logarithm. Differenz 46 die sich in der Tabelle befindet, schreibe den links danebenstehenden Proportionaltheil 6 heraus, und setze ihn rechts an die vorhin

gefun-

gefundene Zahl 57322, so hat man 573226, endlich subtrahire man die gefundene log. Differenz 46, von der gesuchten 52, an den Rest 6 hänge man eine Null, und suche 60 wiederum in der Tabelle bei den Proportionaltheilen unter den logarithmischen Differenzen auf. Da 60 nicht selbst da steht, so nehme man den Proportionaltheil 7, der sich neben der nächst kleinern log. Differenz 53 befindet, und setze ihn rechts an die vorhin gefundene Zahl 573226, so hat man 5732267. Nun bestimme man wie viele von diesen gefundenen sieben Ziffern zur ganzen Zahl gehören, indem man auf die Kennziffer des gegebenen Logarithmus Rücksicht nimmt. Diese ist 3, also ist 5732,267 die gesuchte Zahl. (Die letzte Decimalziffer 7 dieser Zahl könnte auch füglich als 8 angegeben werden, weil die in der Tabelle bei dem Proportionaltheil 8 stehende logarithmische Differenz 61 dem obigen Rest 60 näher kommt als 53, bei welcher der Proportionaltheil 7 steht. Ueberhaupt ist die siebente Ziffer einer vermittelst der Proportionaltheile gefundenen Zahl oft ungewiß.)

Exempel zur Übung.

1) Welche Zahl gehört zu dem Log. 1,6581936? Antw. 45,51. Genauer 45,51909.

2) Welche Zahl gehört zu dem Log. 2,3865217? Antw. 243,5. Genauer 243,5127.

3) Welche Zahl gehört zu dem Log. 3,8429002? Antw. 6964,663.

4) Welche Zahl gehört zu dem Log. 4,6182975? Antw. 41523,84.
5) Welche Zahl gehört zu dem Log. 5,7829013? Antw. 606598,4.
6) Welche Zahl gehört zu dem Log. 6,4986215? Antw. 3152255.
7) Welche Zahl gehört zu dem Log. 12,8954608? Antw. Beinahe 7860696000000.
8) Welche Zahl gehört zu dem Log. 4,7610153? Antw. 57678,68.

§. 41. Den ächten Bruch zu finden, welcher zu einem negativen Logarithmus gehört.

Man betrachte den gegebenen Logarithmus als positiv, addire zu seiner Kennziffer die Kennziffer 7, ziehe von dieser Summe ∫ den gegebenen Logarithmus ab, suche die Zahl, die zu dem Rest gehöret, und zähle in ihr von der Rechten zur Linken so viele Decimalstellen ab, als die Summe ∫ Einer hat. Z. B. Der negative Logarithmus sey — 1,3856793. Man addire also 7 zu seiner Kennziffer 1, so ist die Summe ∫ = 8. Nun subtrahire man den gegebenen Logarithmus, als positiv betrachtet von dieser Summe.

$$\begin{array}{r} 8 \\ 1,3856793 \\ \hline 6,6143207 \end{array}$$

Hierauf suche man die Zahl, die zu diesem Logarithmus gehört (§. 40), diese ist 4114533, in

in ihr zähle man von der Rechten zur Linken acht Decimalstellen ab, so ist 0,04114533 der gesuchte Decimalbruch.

Ferner, den Bruch zu finden, wenn der gegebene Logarithmus —3,5768039 ist. Man addire wiederum 7 zu seiner Kennziffer 3, so ist die Summe $f = 10$. Also

$$\begin{array}{r} 10 \\ 3,5768039 \\ \hline 6,4231961 \end{array}$$

Die Zahl, welche zu diesem Logarithmus 6,4231961 gehört, ist 2649696, in ihr zähle man zehn Decimalstellen (weil hier $f = 10$) von der Rechten zur Linken ab, so ist 0,0002649696 der gesuchte Decimalbruch.

§. 42. Sollte der gegebene Logarithmus so ausgedrückt seyn 0,6285432 — 1, so addire man zu seiner Kennziffer und zu der von ihm abzuziehenden Kennziffer 1, die Kennziffer 6, so bekommt er diese Form 6,6285432 — 7

Hierauf suche man die Zahl, die zu dem Logarithmus 6,6285432 gehört (§. 40), diese ist: 4251510, und zähle in ihr sieben Decimalstellen, (weil die Kennziffer 7 vom Logarithmus abzuziehen ist,) von der Rechten zur Linken ab, so ist 0,4251510 der gesuchte Decimalbruch. Eben so, wenn der gegebene Logarithmus 0,9846721 — 3 ist, so addire man wiederum zu den Kennziffern

0 und 3 die Kennziffer 6, so erhält er diese Form:

6,9846721 — 9.

Die zu dem Logarithmus 6,9846721 gehörige Zahl findet man nach §. 40. = 9653216, in ihr zähle man, (da die Kennziffer 9 zu subtrahiren ist,) neun Decimalstellen von der Rechten zur Linken ab, so ist 0,009653216 der gesuchte Decimalbruch.

Ist folgender Log. gegeben, 2,3784561 — 3, so gebe man ihm zuerst diese Form 0,3784561 — 1, das heißt: man mache, daß die erste Kennziffer 0 wird, (indem man eine ihr gleiche Zahl von ihr und der zweiten abzuziehenden Kennziffer subtrahirt,) sodann verfahre man wie vorhin, so ist der gesuchte Decimalbruch = 0,2390320.

Exempel zur Übung.

1) Welcher Decimalbruch gehört zu dem Logarithmus — 0,3795462? Antw. 0,4173051.
2) Welcher Decimalbruch gehört zu dem Logarithmus — 1,5623173? Antw. 0,02739571.
3) Welcher Decimalbruch gehört zu dem Logarithmus — 2,8152605? Antw. 0,001530170.
4) Welcher Decimalbruch gehört zu dem Logarithmus — 3,2461537? Antw. 0,0005673437.
5) Welcher Decimalbruch gehört zu dem Logarithmus 0,6159183 — 1? Antw. 0,4129697.
6) Welcher Decimalbruch gehört zu dem Logarithmus 3,4892774 — 5? Antw. 0,03085158.

An-

Anwendung der Logarithmen.

Erste Aufgabe.

Zu drei gegebenen Zahlen, vermittelst der Logarithmen, die vierte geometrische Proportionalzahl zu finden?

Da bei einer geometrischen Proportion die beiden mittlern Glieder b und c mit einander multiplicirt werden, und das Product bc mit dem ersten Glied a dividirt wird, so addire man die Logarithmen von b und c (§. 11) und subtrahire von ihrer Summe den Logarithmus von a, (§. 14) so hat man den Logarithmus des vierten Gliedes x. Oder log. b + log. c — log. a = log. x. Nun suche man den Logarithmus von x in der Tabelle auf, so findet man die ihm zugehörige Zahl x.

Z. B. Wenn 13467 Pariser Fuße 14400 Nbg. Fuße betragen, wie viele Nürnberger Fuße betragen 236487 Pariser Fuße? Da

Par. Fuße.		Par. Fuße.		Nbg. Fuße.		Nbg. Fuße.	
13467	:	236487	=	14400	:	x	so ist

log. 14400 + log. 236487 — log. 13467 = log. x

log. 14400	=	4,1583625
log. 236487	=	5,3738073
		9,5321698
log. 13467	=	4,1292711
gesuchter log. x	=	5,4028987

Die

Die Zahl x welche zu dem gefundenen Logarithmus gehöret, ist nach §. 40 = 252870,8 Nbg. Fuße.

Exempel zur Übung.

1) Wie viele Rheinländische Fuße betragen 18721 Nbg. Fuße, wenn 13467 Rhnl. Fuße = 13917 Nbg. Fußen? Antw. 18115,66 Rhnl. Fuße.

2) Wie viele Wiener Fuße betragen 8976 Amsterdamer Fuße, wenn 12530 Wiener Fuße = 14011 Amsterdamer Fußen? Antw. 8027,214 Wiener Fuße.

Zweite Aufgabe.

Einen Kettensatz vermittelst der Logarithmen zu berechnen.

Da das Product der Zahlen, die in der ersten Columne unter einander stehen, mit dem Product der Zahlen in der zweiten Columne, in der sich die gesuchte Zahl befindet, dividiret werden muß, so addire man die Logarithmen der Zahlen in der ersten Columne, und die Logarithmen der Zahlen in der zweiten Columne, und subtrahire die Summe der Logarithmen der zweiten Columne von der Summe der Logarithmen der ersten Columne, so ergiebt sich der Logarithmus der gesuchten Zahl. Wenn nemlich

$$xA = mB$$
$$nB = pC$$
$$rC = qA$$

so ist $\frac{mpq}{nr} = x$

folglich $(\log. m + \log. p + \log. q) - (\log. n + \log. r) = \log. x.$

Z. B. Wie viele altbaierische Scheffel betragen 1000 Nürnberger Simra, wenn ein altbaierischer Scheffel 8,944 altb. Cubikfuße, ein altbaierischer Cubikfuß 0,7253 Pariser Cubikfuß, ferner 1017,1 Pariser Cubikzolle einen Nürnberger Metzen, und 16 Nbg. Metzen ein Nürnberger Simra geben?

Altb. Sch.?	1000 Nbg. Simra.
Nbg. Simra 1	16 Nbg. Metzen.
Nbg. Metzen 1	1017,1 Par. C. Zoll.
P. C. Z. 1728	1 Par. C. Fuß.
P. C. F. 0,7253	1 altb. C. Fuß.
alt. C. F. 8,944	1 altb. Scheffel.

Berechnung vermittelst der Logarithmen.

	log. 1728	= 3,2375437
(§. 39.)	log. 0,7253	= 3,8605177 − 4
(§. 37.)	log. 8,944	= 0,9515318
	Summe	4,0495932

log. 1000 = 3,
log. 16 = 1,2041200
(§. 37.) log. 1017,1 = 3,0073636

Summe 7,2114836
subtrahirt 4,0495932

gesuchter Log. = 3,1618904

Die zu dem gefundenen Logarithmus gehörige Zahl ist nach §. 40. 1451,744. Also betragen 1000 Nbg. Simra fast 1452 altbaierische Scheffel.

Exempel zur Übung.

1) Wie viele Livres Sterling betragen 6348 fl. Münz, wenn 9 fl. Münz 5 Reichsthaler Current, $138\frac{1}{2}$ Rthlr. Current 100 Thlr. Amsterdam. Curr. 1 Thlr. Amst. C. $8\frac{1}{3}$ ß. Vl. und $39\frac{3}{8}$ ß. Vl. ein Livre Sterling betragen?
Antw. 552,9487 L. Sterl.

2) Wie viele Laubthaler geben 857 Ducaten, wenn 1 Ducaten $2\frac{3}{4}$ Rthlr. in Ducaten, 100 Rthlr. in Duc. $112\frac{1}{4}$ Rthlr. Münze, 100 Rthlr. Münze $104\frac{7}{8}$ Rthlr. in Laubthalern und $1\frac{7}{12}$ Rthlr. in Laubthalern 1 Stück Laubthaler beträgt?
Antw. 1752,263 Stücke Laubthaler.

Dritte Aufgabe.

Vermittelst der Logarithmen eine gegebene Zahl auf eine bestimmte Potenz zu erheben.

Man multiplicire den Logarithmus der gegebenen Zahl mit dem Exponenten der Potenz, so hat

hat man den Logarithmus der gesuchten Potenz, (§. 15.) nun suche man in der Tabelle, die zu diesem Logarithmus gehörige Zahl auf, so ist diese die gesuchte Potenz. Z. B. Die Zahl 21 auf die dritte Potenz zu erheben. Hier ist der Potenzexponent = 3, der Logarithmus von 21 ist = 1,3222193. Also

$$\begin{array}{r} 1,3222193 \\ 3 \\ \hline 3,9666579 \end{array}$$

Wenn man in der Tabelle die Zahl aufsucht, welche zu diesem Logarithmus gehört, so ist solche 9261. Also ist $(21)^3 = 9261$.

Ferner, es soll $\frac{105}{100}$ auf die siebente Potenz erhoben werden.

$$\begin{array}{lr} \log. 105 = & 2,0211893 \\ \log. 100 = & 2 \\ \hline \log. \frac{105}{100} = & 0,0211893 \\ & 7 \\ \hline & 0,1483251 \end{array}$$

Die zu diesem Logarithmus gehörige Zahl ist nach §. 40. 1,4071. Also ist $(\frac{105}{100})^7 = 1,4071$.

Ferner $\frac{104}{100}$ auf die 23ste Potenz zu erheben.

 log.

$$
\begin{array}{rl}
\log.\ 104 = & 2,0170333 \\
\log.\ 100 = & 2 \\
\hline
& 0,0170333 \\
& 23 \\
\hline
& 510999 \\
& 340666 \\
\hline
& 0,3917659
\end{array}
$$

Die zu diesem Logarithmus gehörige Zahl ist 2,46471. Also ist $(\frac{104}{100})^{23} = 2,46471$.

Ferner $\frac{100}{105}$ auf die neunte Potenz zu erheben.

$$
\begin{array}{rl}
\log.\ 105 = & 2,0211893 \\
\log.\ 100 = & 2 \\
\hline
\log.\ \frac{100}{105} = & -\ 0,0211893 \\
& 9 \\
\hline
& -\ 0,1907037
\end{array}
$$

Der Bruch, welcher zu diesem negativen Logarithmus gehört, wird nach §. 41. bestimmt. Nemlich

$$
\begin{array}{l}
7, \\
0,1907037 \\
\hline
6,8092963 - 7
\end{array}
$$

Der zu diesem Logarithmus gehörige Decimalbruch ist (nach §. 42.) 0,6446089. Also ist $(\frac{100}{105})^9 = 0,6446089$

Man kann bei der Berechnung dieses Exempels auch so verfahren. Man verwandle $\frac{100}{105}$ in

 einen

einen Decimalbruch, so findet man solchen = 0,9523809 ... hierauf suche nach §. 39. den Logarithmus dieses Decimalbruchs und multiplicire ihn mit dem Potenzexponenten 9.

$$\begin{array}{rr} \log.\ 0{,}9523809 = 6{,}9788107 & -\ 7 \\ 9 & 9 \\ \hline 62{,}8092963 & -\ 63 \end{array}$$

Oder, wenn man 56 von den beiden Kennziffern 62 und 63 abzieht: 6,8092963 — 7, zu diesem Logarithmus gehört der Decimalbruch 0,6446089 wie vorhin.

Exempel zur Übung.

1) Wie ist die vierte Potenz von 36 oder $(36)^4$? Antw. 1679616.

2) Wie ist $(\frac{103}{100})^{12}$? Antw. 1,425760.

3) Wie ist $(\frac{104\frac{1}{2}}{100})^{26}$? (Da $104\frac{1}{2} = 104{,}5$ ist, so ist $\frac{104\frac{1}{2}}{100} = \frac{104{,}5}{100}$, oder wenn man Zähler und Nenner mit 10 multiplicirt, $= \frac{1045}{1000}$, also $(\frac{104\frac{1}{2}}{100})^{26} = (\frac{1045}{1000})^{26}$) Antw. 3,140681.

4) Wie ist $(\frac{105\frac{3}{4}}{100})^{42}$? Man multiplicire Zähler und Nenner mit 4, so ist $\frac{105\frac{3}{4}}{100} = \frac{423}{400}$ also $(\frac{105\frac{3}{4}}{100})^{42} = (\frac{423}{400})^{42}$? Antw. 10,46590.

5) Wie ist $(\frac{5}{6})^{63}$? Antw. 0,00001027020.

6) Wie ist $(\frac{7}{8})^{16}$? Antw. 0,1180668.

7) Wie

7) Wie ist $(2,416)^{14}$? Antw. 230864,2.

8) Wie ist $(1,00345)^{118}$? Antw. 1,501346.

9) Wie ist $(0,7583)^{64}$? Antw. 0,0000000002040840.

Vierte Aufgabe.

Vermittelst der Logarithmen aus einer gegebenen Zahl die Wurzel eines bestimmten Grades auszuziehen.

Man dividire den Logarithmus der gegebenen Zahl mit dem Exponenten der Wurzel, so hat man den Logarithmus der gesuchten Wurzel (§. 16.), nun suche man in der Tabelle die zu diesem Logarithmus gehörige Zahl auf, so ist diese die gesuchte Wurzel.

Z. B. Aus der Zahl 56 die Wurzel des zweiten Grades, oder die Quadratwurzel zu ziehen. Hier ist der Wurzelexponent = 2. Der Logarithmus von 56 ist 1,7481880. Also

$$
\begin{array}{r}
2)\ \underline{1,7481880} \\
0,8740940
\end{array}
$$

Die zu diesem Logarithmus gehörige Zahl ist (nach §. 40.) = 7,483315. Also ist $\sqrt{56}$ = 7,483315.

Ferner aus der Zahl 8372 die Wurzel des dritten Grades oder die Cubikwurzel zu ziehen. Hier ist der Wurzelexponent = 3. Also

$$\log.\ 8372 = 3{,}9228292$$
$$3)\ 3{,}9228292$$
$$\log\ \sqrt[3]{8372} = 1{,}3076097$$

Die zu diesem Logarithmus gehörige Zahl ist (nach §. 40.) = 20,30531. Also ist $\sqrt[3]{8372} =$ 20,30531.

Ferner aus der Zahl 273864 die Wurzel des zwölften Grades zu ziehen. Hier ist der Wurzelexponent = 12. Der Log. der gegebenen Zahl ist, (nach §. 38.) = 5,4375349. Also

$$3)\ 5{,}4375349$$
$$4)\ 1{,}8125116$$
$$\log.\ \sqrt[12]{273864} = 0{,}4531279$$

Die zu diesem Logarithmus gehörige Zahl ist, (nach §. 40.) = 2,838754. Oder $\sqrt[12]{273864} =$ 2,838754 ...

Ferner aus dem Decimalbruch 0,6123 die Wurzel des siebenten Grades zu ziehen. Hier ist der Wurzelexponent = 7 und der Logarithmus von 0,6123 ist = 3,7869643 − 4. (§. 39.) Man addire nun zu der zu subtrahirenden Kennziffer so viele Einer, daß sich die Summe ohne Rest durch den Wurzelexponenten theilen läßt, und addire gleichfalls zu der ersten Kennziffer die nemliche Anzahl Einer, damit der Werth des aus zwei Theilen bestehenden Logarithmus ungeändert bleibe. Hier addire man also 3 Einer zu der zu subtrahirenden Kenn-

Kennziffer 4, und eben so viele Einer zu der ersten Kennziffer 3, nemlich

$$\begin{array}{r} 3{,}7869643 - 4 \\ 3 \qquad\quad\;\; 3 \\ \hline 6{,}7869643 - 7 \end{array}$$

Diesen Logarithmus dividire man mit dem Wurzelexponenten 7.

$$\begin{array}{r} 7)\; 6{,}7869643 - 7 \\ \hline 0{,}9695663 - 1 \end{array}$$

(dazu addirt nach §. 43.) $6, \qquad\qquad 6$

$$\log.\ \sqrt[7]{0{,}6123} = 6{,}9695663 - 7$$

Der zu diesem Logarithmus gehörige Decimalbruch ist (nach §. 42.) $= 09{,}323227$. Also ist $\sqrt[7]{0{,}6123} = 0{,}9323227$.

Ferner aus dem Decimalbruch 0,08437 die Wurzel des neunten Grades zu ziehen.

$$\begin{array}{r} \log.\ 0{,}08437 = 3{,}9261880 - 5 \\ 4 \qquad\qquad 4 \\ \hline 9)\; 7{,}9261880 - 9 \\ \hline 0{,}8806875 - 1 \\ 6 \qquad\qquad 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\log.\ \sqrt[9]{0{,}08437} = 6{,}8806875 - 7$$

Zu diesem Logarithmus gehört der Decimalbruch 0,7597793. Also ist $\sqrt[9]{0{,}08437} =$ 0,7597793.

Aus dem Bruch $\frac{5}{6}$ die Wurzel des 23sten Grades zu ziehen.

$$\log. 6 = 0,7781513$$
$$\log. 5 = 0,6989700$$
$$(\S.\ 39.)\ \tfrac{5}{6} = \log. -\ 0,0791813$$

$$23 \,|\, -0,0791813 \,|\, 0,0034426$$

101
98
61
153

Also $\log. \sqrt[23]{\tfrac{5}{6}} = -\ 0,0034426$

Um nun die Zahl zu finden, die zu diesem negativen Logarithmus gehört, verfahre man nach §. 41. Nemlich

$$7$$
$$0,0034426$$
$$\log. \sqrt[23]{\tfrac{5}{6}} = 6,9965574-7$$

Also der zu diesem Logarithmus gehörige Decimalbruch = 0,9921045. Oder es ist $\sqrt[23]{\tfrac{5}{6}} =$ 0,9921045.

Exempel zur Übung.

1) Wie ist $\sqrt{5416}$? Antw. 73,59347 ...

2) Wie ist $\sqrt[3]{8796}$? Antw. 20,64247 ...

3) Wie

3) Wie ist $\sqrt[5]{26852}$? Antw. 7,687679 ...

4) Wie ist $\sqrt[7]{234}$? Antw. 2,180014 ...

5) Wie ist $\sqrt[13]{428796}$? Antw. 2,711752 ...

6) Wie ist $\sqrt[47]{814,643}$? Antw. 1,153281 ...

7) Wie ist $\sqrt[8]{0,3147}$? Antw. 0,8654400 ...

8) Wie ist $\sqrt[37]{0,068423}$? Antw. 0,9300770 ...

9) Wie ist $\sqrt[53]{0,803467}$? Antw. 0,9958798 ...

10) Wie ist $\sqrt[32]{\frac{13}{16}}$? Antw. 0,9933244 ...

11) Wie ist $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$? Antw. 0,6933613 ...

12) Wie ist $\sqrt[105]{\frac{3}{32}}$? Antw. 0,9777083 ...

13) Wie ist die Wurzel des 17ten Grades aus der achten Potenz von 45, oder wie ist $\sqrt[17]{(45)^8}$? (Hier wird zuerst der Logarithmus von $(45)^3$ gesucht, indem man den Logarithmus von 45 mit 8 multiplicirt, sodann wird der erhaltene Logarithmus mit dem Wurzelexponenten 17 dividirt, u. s. f.) Antw. 5,997666.

14) Wie ist $\sqrt[63]{(346)^5}$? Antw. 1,590427 ...

15) Wie ist $\sqrt[71]{\frac{105}{100})^{13}}$? Antw. 1,008973 ...

Fünf-

Fünfte Aufgabe.

Vermittelst der Logarithmen zu finden, die wievielste Potenz von a eine gegebene Zahl m ist, oder, wenn $a^x = m$ ist, den Potenzexponenten x zu berechnen.

Man dividire den Logarithmus der Zahl m mit dem Logarithmus der Zahl a, so ist der Quotient der gesuchte Potenzexponent x.

Denn wenn $a^x = m$ ist, so ist $\log. a^x = \log. m$. Es ist aber $\log. a^x = x \log. a$. (§. 15.)

Folglich $x \log. a = \log. m$, also (wenn man die beiden Seiten dieser Gleichung mit log. a dividirt,) $x = \frac{\log. m}{\log. a}$.

Z. B. Die wievielste Potenz von 7 ist die Zahl 2401? Hier ist $m = 2401$ und $a = 7$. Nun ist der Logarithmus von $2401 = 3,3803922$ und der Logarithmus von $7 = 0,8450980$. Also $x = \frac{3,3803922}{0,8450980}$. Man dividire nun wirklich.

$$0,8450980 \,|\, 3,3803922 \,|\, 4$$
$$3,3803920$$
$$0\;0000002$$

Dieser Quotient ist eigentlich etwas größer als 4, weil bei der Division ein Rest bleibt, gleichwohl ist 4 der gesuchte richtige Potenzexponent. Daß aber 4 nicht ganz genau als Quotient herauskommt, rührt daher, weil man nur mit Stücken der

der Logarithmen rechnet, da die Logarithmen der meisten ganzen Zahlen eine unendliche Anzahl Decimalziffern haben, (§. 17 und 18.)

Ferner: die wievielste Potenz von 9 ist die Zahl 8672? Hier ist $m = 8672$ und $a = 9$. Nun ist $\log. 8672 = 3,9381193$ und $\log. 9 = 0,9542425$. Also $x = \frac{3,9381193}{0,9542425}$

$$
\begin{array}{l}
0,9542425 | 3,9381193 | 4,126958 \ldots \\
\quad 12114930 \\
\quad\quad 25725050 \\
\quad\quad\quad 66402000 \\
\quad\quad\quad\quad 91474500 \\
\quad\quad\quad\quad\quad 55926750 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 82146250
\end{array}
$$

Also ist der gesuchte Potenzexponent $x = 4,126958 \ldots$ oder es ist $9^{4,126958 \ldots} = 8672$, nemlich die vierte Potenz von 9 ist kleiner als 8672, aber die fünfte Potenz von 9 ist schon größer als 8672. Nun ist $4,126958 = 4 + 0,126958$, folglich $9^{4,126958 \ldots} = 9^{4+0,126958}$. Da aber $a^p . a^r = a^{p+r}$ (§. 3.) so ist umgekehrt $a^{p+r} = a^p . a^r$. Nun sey $a = 9$, $p = 4$ und $r = 0,126958$, so ist $9^{4+0,126958} = 9^4 . 9^{0,126958}$ oder $= 9^4 . 9^{\frac{126958}{1000000}}$. Es ist aber eine Potenz, deren Exponent ein Bruch ist, z. B. $a^{\frac{t}{u}}$ als eine Wurzelgröße zu betrachten, von

der

der Form $\sqrt[u]{a^t}$, folglich ist $9^{\frac{126958}{1000000}}$, zu betrachten als $\sqrt[100000]{9^{126958}}$. Daher ist $9^{4,126958} = 9^4 . \sqrt[10000000]{9^{126958}}$. Dieses dient zur Erläuterung was das heißen soll, 9 auf die 4,126958te Potenz zu erheben, es soll nemlich 9 auf die vierte Potenz erhoben, und diese Potenz mit der millionsten Wurzel der 126958sten Potenz von 9 multiplicirt werden; so giebt dieses Product die Zahl 8672 sehr nahe.

Ferner: die wievielste Potenz von $\frac{105}{100}$ ist die Zahl 6? Da $(\frac{105}{100})^x = 6$, so ist $x \log. \frac{105}{100} = \log. 6$, folglich $x = \frac{\log. 6}{\log. \frac{105}{100}}$. Nun ist $\log. 6 = 0,7781513$ u. $\log. \frac{105}{100} = 0,0211893$.

Also $x = \frac{0,7781513}{0,0211893}$, oder wenn man wirklich dividirt, $x = 36,72378 \ldots$

Exempel zur Übung.

1) Die wievielste Potenz von 8 ist die Zahl 635? Antw. Der Potenzexponent ist 3,103537..

2) Die wievielste Potenz von 762 ist die Zahl 154396? Antw. Der Potenzexponent ist 1,80038...

3) Die

3) Die wievielste Potenz von $\frac{104}{100}$ ist die Zahl 12? Antwort: Der Potenzexponent ist 63,35714 . .

4) Die wievielste Potenz von 0,4365 ist der Bruch 0,0184? Antw. Da log. 0,4365 = -0,3600158 u. log. 0,0184 = -1,7351822 (§ 39.) so ist der gesuchte Potenzexponent

$$x = \frac{-1,7351822}{-0,3600158} \text{ oder } = 4,819739 \ldots$$

Sechste Aufgabe.

Vermittelst der Logarithmen zu finden, die wievielste Wurzel von b eine gegebene Zahl m ist, oder wenn $\sqrt[x]{b} = m$, den Wurzelexponenten x zu berechnen.

Man dividire den Logarithmus der Zahl b mit dem Logarithmus der Zahl m, so ist der Quotient der gesuchte Wurzelexponent x.

Denn wenn $\sqrt[x]{b} =$ ist, so ist log. $\sqrt[x]{b} =$ log. m. Es ist aber log. $\sqrt[x]{b} = \frac{\log b}{x}$, (§. 16.) also $\frac{\log. b}{x} = \log. m$, folglich (wenn man diese Gleichung mit x multiplicirt,) log. b = x log. m, also $\frac{\log. b}{\log. m} = x$.

Z. B. Die wievielste Wurzel von 314432 ist

ist die Zahl 68? Hier ist also $\sqrt[x]{314432} = 68$, folglich $b = 314432$ und $m = 68$, daher $x = \frac{\log. 314432}{\log. 68}$. Nun ist $\log. 314432 = 5{,}4975267$ und $\log. 68 = 1{,}8325089$, also ist $x = \frac{5{,}4975267}{1{,}8325089}$. Man dividire nun wirklich:

$$1{,}8325089 \,|\, 5{,}4975267 \,|\, 3$$
$$\phantom{1{,}8325089 \,|\,} 5\,4975267 \,|$$

Also ist $x = 3$, d. h. 68 ist die Wurzel des dritten Grades oder die Cubickwurzel von 314432, welches so ausgedrückt wird $\sqrt[3]{314432} = 68$.

Ferner die wievielste Wurzel von 68476 ist die Zahl 5? Hier ist $\sqrt[x]{68476} = 5$, folglich $b = 68476$ und $m = 5$, daher $x = \frac{\log. 86476}{\log. 5}$. Es ist aber $\log. 68476 = 4{,}8355384$ und $\log. 5 = 0{,}6989700$, folglich $x = \frac{4{,}8355384}{0{,}6989700}$. Wenn man wirklich dividirt, so findet man $x = 6{,}91809$.. d. h. die sechste Wurzel von 68476 ist größer als 5, die siebente Wurzel von 68476 ist aber schon kleiner als 5, oder 5 ist kleiner als die sechste Wurzel, und größer als die siebente Wurzel von 68476.

Bei-

Beispiele zur Übung,

1) Die wievielste Wurzel von 48736 ist die Zahl 3? Antw. Der Wurzelexponent ist 9,82527...

2) Die wievielste Wurzel von 365 ist die Zahl 1,034? Antw. Der Wurzelexponent ist 176,4603...

3) Die wievielste Wurzel von 0,2184 ist der Decimalbruch 0,894? Antwort: Da log. 0,2184 = − 0,6607474 und log. 0,894 = − 0,0486625 (§. 39.) so ist der gesuchte Wurzelexponent $x = \frac{-0,6607474}{-0,0486625}$ das ist $x = 13,57816...$

Dritter Abschnitt.

Von der Berechnung der Logarithmen für jedes beliebige System, vermittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten.

§. 1.

Wenn einem logarithmischen System die Basis m zum Grunde liegt, so ist der Logarithmus von $m = 1$, vom $m^2 = 2$, vom $m^3 = 3$ und überhaupt von $m^x = x$. (Zweiter Abschnitt, §. 5.) Eben so, wenn einem andern logarithmischen System die Basis B zum Grunde liegt, so ist in diesem System der Logarithmus von $B = 1$, von $B^2 = 2$, von $B^3 = 3$ und überhaupt von $B^x = x$! Wenn nun eine beliebige Zahl a gegeben ist, für welche der Logarithmus eines Systems, dessen Basis $= B$ ist, gefunden werden soll, so wird diese Zahl a als eine gewisse Potenz der Basis B betrachtet, nemlich a wird $= B^x$ gesetzt, dann ist $\log. a = x$.

§. 2.

§. 2. Gesetzt nun, die Logarithmen für ein gewisses System seyen schon berechnet, so kann, vermittelst dieser Logarithmen, der Logarithmus einer jeden Zahl für jedes andere System leicht gefunden werden. Denn es sey in dem berechneten logarithmischen System die Basis = m, und es soll der Logarithmus der Zahl a für ein logarithmisches System, dessen Basis = B ist, gefunden werden. Ferner sey in dem berechneten logarithmischen System Log. a = p, und in dem andern log. System log. a = x, so ist in dem berechneten System, dessen Basis m ist, $m^p = a$, und in dem andern System, dessen Basis B ist, $B^x = a$, folglich ist $m^p = B^x$, also p log. m = x log. B. (Zweiter Abschnitt, §. 15.) Daher $x = \frac{p \log. m}{\log. B}$. Es ist aber log. m = 1, also ist $x = \frac{p}{\log. B}$, oder auch $x = \frac{1}{\log. B} p$. Es sey nun $\frac{1}{\log. B} = A$, so ist x = A p. Man nennt A, (womit p oder der Logarithmus der Zahl a in dem berechneten System multiplicirt werden muß, um x oder den Logarithmus der Zahl a in dem andern System zu erhalten,) den Modulus des neuen Systems.

Z. B. Es sey das Briggische System das berechnete System, und es soll der Logarithmus der Zahl 425 für ein System gefunden werden, dessen Basis = 2 ist.

Hier ist a = 425. Der Briggische Logarithmus p von 425 ist = 2,6283889. Die Basis B des andern Systems ist = 2, der Briggische Logarithmus von 2 ist = 0,3010300. Also $\frac{1}{\text{log. brig } B}$ oder der Modulus A = $\frac{1}{0,3010300}$ d. i. = $\frac{10000000}{3010300}$, oder wenn man wirklich dividirt, so ist A = 3,3219280, folglich da x = A p, so ist hier x = 3,3219280. 2,6283889, und wenn man wirklich multiplicirt, so findet man den gesuchten Logarithmus = 8,7313186 ... die noch folgenden Decimalziffern werden weggelassen.

§. 3. Wenn aber die Logarithmen noch nicht für ein System berechnet wären, so kann man solche nach verschiedenen Methoden finden. Die leichteste ist die, welche auf der Entwicklung der unbekannten Coefficienten einer solchen Reihe beruht, deren Glieder nach den Potenzen einer willkührlichen Grösse x fortgehen, und deren Werth Null seyn soll, welchen Werth man auch der veränderlichen Grösse beilegt.

§. 4. Wenn nemlich eine veränderliche Grösse y, die bei der allgemeinen Betrachtung noch keinen bestimmten Werth hat, durch eine andere veränderliche Grössen x und durch beständige oder unveränderliche Grössen a, b, c u. s. w. oder A, B, C ꝛc. oder α, β, γ ꝛc. vermittelst einer Gleichung bestimmt wird, so heißt y eine Function von x, und umgekehrt x eine Func-

tion

tion von y. Z. B. Wenn $y = a + bx$ ist, so wird y durch die veränderliche Größe x und durch die beständigen a und b bestimmt, also ist y eine Function von x. Eben so, wenn $y = Ax + Bx^2$ ist, so ist y gleichfalls eine Function von x.

§. 5. Wenn nun eine Function einer veränderlichen Größe von der Form

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots$$

oder auch $y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 \ldots$

sie mag eine bestimmte oder unbestimmte Anzahl Glieder enthalten, für jeden beliebigen Werth von x Null bleibt, so ist jeder Coefficient auch Null. Nemlich es ist $\alpha = 0$, $\beta = 0$ u. s. w. wenn $y = 0$ seyn soll, für jeden Werth von x. Denn man nehme folgende Reihen an:

$$y = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \ldots$$

und $y = 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 \ldots$

so ist in beiden Functionen der Werth von $y = 0$, weil jedes Glied der Reihe $= 0$ ist, oder es ist

$$0 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \ldots$$

und $0 = 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 \ldots$

Nun ist nach der Voraussetzung

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots$$

und auch $0 = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4$

Also ist, $0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \ldots$

$$= \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots$$

 folglich

folglich, wenn x in diesen beiden Functionen einerlei Werth hat,

$$o = \alpha,\ ox = \beta x,\ ox^2 = \gamma x^2 \text{ u. s. w.}$$

oder $\alpha = o,\ \beta = o,\ \gamma = o$ u. s. f.

Eben dieses zeigt sich auch bei der Vergleichung der beiden andern Functionen
$ox + ox^2 + ox^3 + ox^4$ und $\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4$.

§. 6. Es sey nun die Function $\frac{a-x}{a+x}$ gegeben, welche in einer Reihe dargestellt werden soll, so kann man diese Reihe auf zweierlei Art finden. Erstens durch die bloße Division, indem man mit dem Divisor $a + x$ den Dividend $a - x$ wirklich dividirt. Nemlich

$$a + x \;|\; a - x \;|\; 1 - \frac{2x}{a} + \frac{2x^2}{a^2} - \frac{2x^3}{a^3} \text{ u. s. f.}$$

$$\underline{\pm a \pm x}$$

$$-2x$$

$$\underline{-2x - \frac{2x^2}{a}}$$
$$\underline{+ \quad + \quad\ \ }$$

$$+\frac{2x^2}{a}$$

$$\underline{\pm\frac{2x^2}{a} \pm \frac{2x^3}{a^2}}$$

$$-\frac{2x^3}{a^2}$$

Also ist $\frac{a-x}{a+x} = 1 - \frac{2x}{a} + \frac{2x^2}{a^2} - \frac{2x^3}{a^3} \ldots$ u.s.f.

§. 7.

§. 7. Eben diese Reihe findet man auf folgende Art: man setze

$$\frac{a-x}{a+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \ldots .$$

Hier stellt x eine veränderliche Grösse vor, deren Werth nach Belieben angenommen werden kann, die Coefficienten A, B, C, D, E u. s. w. sind beständige Grössen, aber sie sind noch unbekannt und ihr Werth soll gesucht werden.

Da $\frac{a-x}{a+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)$

so ist $a - x = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)$
$(a + x)$ oder

$$\begin{aligned} a - x = {} & Aa + aBx + aCx^2 + aDx^3 + aEx^4 \\ & + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 \end{aligned}$$

und $\begin{aligned} a = {} & Aa + aBx + aCx^2 + aDx^3 + aEx^4 \\ & + Ax + Bx^2 + Cx^2 + Dx^4 \\ & + x \end{aligned}$

folgl. $\begin{aligned} 0 = {} & Aa + aBx + aCx^2 + aDx^3 + aEx^4 \\ & - a + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 \\ & + x \end{aligned}$ oder

$$0 = \left.\begin{matrix} Aa + aB \\ -a + A \\ +1 \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} aC \\ +B \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} aD \\ +C \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} aE \\ +D \end{matrix}\right\} x^4$$

Da nun der Werth dieser Function Null seyn soll, der Werth von x mag seyn, welchen man will, so ist auch jeder Coefficient = Null, (§ 5) d. i. $Aa - a = 0$, $aB + A + 1 = 0$, $aC + B = 0$,

$aD + C = 0$, $aE + D = 0$ u. s. f. Da nun $Aa - a = 0$, so ist $Aa = a$, und $A = \frac{a}{a}$, oder $A = 1$, da ferner $aB + A + 1 = 0$, so ist $aB = - A - 1$, und $B = \frac{-A-1}{a}$, da nun $A = 1$, so ist $B = \frac{-1-1}{a}$,

oder $B \frac{-2}{a}$

Ferner da $aC + B = 0$, und $B = -\frac{2}{a}$, so ist $aC - \frac{2}{a} = 0$, also $aC = \frac{2}{a}$ und $C = \frac{2}{a^2}$.

Auf ähnliche Art findet man $D = -\frac{2}{a^3}$, $E = \frac{2}{a^4}$.

Man substituire diese gefundenen Werthe der Coefficienten statt A, B, C, D, E u. s. f. in der angenommenen Reihe, $A + Bx + Cx^2$ u. s. f. so ist $\frac{a-x}{a+x} = 1 - \frac{2x}{a} + \frac{2x^2}{a^2} - \frac{2x^3}{a^3} + \frac{2x^4}{a^4} \ldots$ u. s. f.

§. 8. Bei der Form der angenommenen Reihe muß darauf gesehen werden, daß die Potenzen von x nach der natürlichen Ordnung wachsen. Ob x auch im ersten Glied vorkommen, das heißt Ax statt A gesetzt werden darf, wird durch die gegebene Function bestimmt. Z. B. Bei der gegebenen Function $\frac{a-x}{a+x}$ darf x nicht im ersten Gliede der Reihe vorkommen. Denn wenn

$x =$ Null gesetzt wird, so ist $\frac{a-x}{a+x} = \frac{a}{a} = 1$. Also muß für die Reihe, in welche die Function aufgelöset wird, auch ein Werth bleiben, wenn in ihr $x =$ Null gesetzt wird. Es würde ihr Werth aber Null seyn, wenn x in ihrem ersten Glied vorkäme, oder wenn sie die Form $Ax + Bx^2 + Cx^3$ u. s. f. hätte. Denn wenn $x = 0$ ist, so ist $Ax = 0$, $Bx^2 = 0$ u. s. f. also ist die ganze Reihe $= 0$, welches für diese gegebene Function unrichtig wäre.

§. 9. Auf diese Art ist es leicht, den Logarithmus einer jeden Zahl für ein gegebenes System zu finden. Denn jede Zahl kann durch $1 + x$ dargestellt werden. Man setze also
$\log. (1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 \ldots$ u.s.f.

Hier muß auch im ersten Glied der Reihe sich x befinden. Denn wenn $x = 0$ ist, so ist $\log. (1+x) = \log. (1+0) = \log. 1$. Nun ist der Logarithmus von 1 in jedem System $= 0$, also muß für $x = 0$ auch die entsprechende Reihe $= 0$ seyn. Nun findet dieses bei der angenommenen Reihe statt, weil $Ax + Bx^2$ u. s. f. $= 0$ wird, wenn $x = 0$ gesetzt wird.

Es sey ferner eine andere Zahl $1 + y$ dem Quadrat von $1 + x$ gleich, nemlich es sey $(1+x)^2 = 1 + y$, oder $1 + 2x + x^2 = 1 + y$, so ist

$$y = 2x + x^2$$
$$y^2 = 4x^2 + 4x^3 + x^4$$
$$y^3 = 8x^3 + 12x^4 + 6x^5 + x^6$$
$$y^4 = 16x^4 + \text{u. s. f.}$$

Da nun $(1+x)^2 = 1+y$, so ist auch log. $(1+x)^2 =$ log. $(1+y)$, weil bei dem nemlichen System zu gleichen Zahlen auch gleiche Logarithmen gehören. Folglich ist 2 log. $(1+x) =$ log: $(1+y)$ (§. 15. 2. Abschn., S. 35.)

Wenn also log. $(1+y) = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 \ldots$ u. s. f. gesetzt wird, so ist
2 log. $(1+x) = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 \ldots$ u. s. f.
und wenn die obigen Werthe von y substituirt werden, so ist

$$\begin{aligned} 2\,\text{log.}\,(1+x) = 2Ax &+ Ax^2 \\ &+ 4Bx^2 + 4Bx^3 + Bx^4 \\ &\qquad + 8Cx^3 + 12Cx^4 \text{ u. s. f.} \\ &\qquad\qquad + 16Dx^4 \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

Da nun log. $(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4$
so ist 2 log. $(1+x) = 2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + 2Dx^4 \ldots$
also $2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + 2Dx^4$

$$\begin{aligned} = 2Ax &+ Ax^2 \\ &+ 4Bx^2 + 4Bx^3 + Bx^4 \\ &\qquad + 8Cx^3 + 12Cx^4 \\ &\qquad\qquad + 16Dx^4 \end{aligned}$$

folg-

folglich $0 = 2Ax + Ax^2$
$- 2Ax + 4Bx^2 + 4Bx^3 + Bx^4$
$- 2Bx^2 + 8Cx^3 + 12Cx^4$
$- 2Cx^3 + 16Dx^4$
$- 2Dx^4$

$$\text{od. } 0 = \left.\begin{matrix} 2A \\ -2A \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} A \\ +4B \\ -2B \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} +4B \\ +8C \\ -2C \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} +B \\ +12C \\ +16D \\ -2D \end{matrix}\right\} x^4 \ldots$$

Also ist, nach §. 5. $2A - 2A = 0$, $A + 4B - 2B = 0$, $4B + 8C - 2C = 0$, $B + 12C + 16D - 2D = 0$.

Folglich, da $2A - 2A = 0$, so ist $2A = 2A$ und $A = A$. Ferner da $A + 4B - 2B = 0$, so ist $A + 2B = 0$, also $2B = - A$ und $B = -\frac{1}{2}A$. Da $4B + 8C - 2C = 0$, so ist $4B + 6C = 0$, also $- 2A + 6C = 0$, folglich $6C = 2A$ und $C = \frac{1}{3}A$. Da $B + 12C + 16D - 2D = 0$, so ist auch $B + 12C + 14D = 0$, oder $-\frac{1}{2}A + 4A + 14D = 0$, also $14D = -\frac{7}{2}A$ und $D = -\frac{7}{28}A$, oder $D = -\frac{1}{4}A$.

Wenn man nun diese gefundenen Werthe der Coeficienten, A, B, C, D u. s. f. in der ersten Gleichung

$$\log.(1 + x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 \ldots$$

substituirt, so erhält man

log.

$\log.(1+x) = Ax - \frac{1}{2}Ax^2 + \frac{1}{3}Ax^3 - \frac{1}{4}Ax^4 \ldots$

oder $\log.(1+x) = A(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 \ldots)$

§. 10. Bei der Ableitung dieser Reihe ist A unbestimmt geblieben, man kann daher solches beliebig annehmen. Jede Annahme von A giebt den Logarithmus der Zahl $1+x$ für ein eigenes logarithmisches System. Also giebt es so viele logarithmische Systeme, so viele Annahmen von A gemacht werden können, nemlich unendlich viele. Wenn man $A = 1$ setzt, so erhält man die Logarithmen für ein System, welches das natürliche heißt, die Logarithmen dieses Systems werden natürliche Logarithmen genennt. Man bezeichnet sie mit l. Z. B. $l.(1+x)$ ist der natürliche Logarithmus der Zahl $1+x$, die Logarithmen der andern Systeme werden mit log. bezeichnet.

§. 11. Die Zahl A heißt der Modul desjenigen logarithmischen Systems, für welches der Logarithmus der Zahl $1+x$ durch die Multiplication der Zahl A mit der Reihe $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ u. s. f. gefunden wird.

§. 12. Was die wirkliche Berechnung des Logarithmus der Zahl $1+x$ vermittelst der Reihe $A(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \ldots)$ betrift, so ist dabei folgendes zu bemerken. Wenn x kleiner als 1 oder ein ächter Bruch ist, so werdie Glieder x, $\frac{1}{2}x^2$ u. s. f. sehr bald so klein,

daß

daß man mit wenigen Gliedern den Logarithmus bis auf 7 Decimalstellen finden kann, d. h. die Reihe läuft schnell zusammen, oder sie ist sehr convergent. Z. B. Es sey $x = \frac{1}{10}$, so ist der Logarithmus der Zahl $1 + \frac{1}{10}$ oder $\frac{11}{10} =$

$$A\left(\tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{2}\cdot(\tfrac{1}{10})^2 + \tfrac{1}{3}\cdot(\tfrac{1}{10})^3 - \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{10})^4 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{10})^5 - \tfrac{1}{6}(\tfrac{1}{10})^6\right)$$

$$\text{od.} = A\left(\tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{200} + \tfrac{1}{3000} - \tfrac{1}{40000} + \tfrac{1}{500000} \; \tfrac{1}{6000000}\right)$$

$$\text{od.} = A\,(0{,}1 - 0{,}005 + 0{,}0003333 - 0{,}000025 + 0{,}000002 - 0{,}0000001)$$

$$\text{also} = A\,[0{,}1 + 0{,}0003333 + 0{,}000002 - (0{,}005 + 0{,}000025 + 0{,}0000001)]$$

oder $\log. \frac{11}{10} = A.\ 0{,}0953102.$

Hier waren sechs Glieder der Reihe hinlänglich, den Logarithmus von $\frac{11}{10}$ auf sieben Decimalstellen zu berechnen, weil die folgenden Glieder so klein werden, daß sie auf die Zehnmilliontheilchen, oder auf die siebente Decimalstelle keinen Einfluß mehr haben.

Je mehr sich aber der ächte Bruch, den x bedeutet, der Einheit nähert, desto weniger nähert sich diese Reihe, desto mehrere Glieder muß man also von ihr berechnen. Ist $x = 1$, so ist $1 + x = 2$, folglich der Logarithmus von $2 = A\,(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots)$ Diese Reihe ist zwar auch noch convergent, aber so wenig, daß man sehr viele Glieder von ihr berechnen müßte, um den Logarithmus von 2 bis auf 7 Decimalstellen zu erhalten.

Wenn

Wenn x größer als 1 ist, so werden die Glieder der Reihe immer größer, oder die Reihe wird divergent, und ist daher nicht mehr zu gebrauchen. Man muß also eine andere Reihe finden, vermittelst deren der Logarithmus jeder Zahl durch Näherung berechnet werden kann.

§. 13. Man setze nemlich x negativ, so werden in der vorigen Reihe die ungeraden Glieder, x, $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{1}{5}x^5$ u. s. f. negativ, die geraden Glieder $\frac{1}{2}x^2$, $\frac{1}{4}x^4$, $\frac{1}{6}x^6$ u. s. f. werden positiv, (weil $-x$ mit $-x$ multiplicirt $+x^2$, $-x^2$ mit $-x^2$ multiplicirt $+x^4$, $-x^4$ mit $-x^2$ multiplicirt $+x^6$ giebt, u. s. f.) da sie nun in der Reihe das $-$ Zeichen vor sich haben, so wird solches auch jetzt vor sie gesetzt, also ist

$$\log.(1-x) = A[-x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 \ldots]$$

Man subtrahire diese Reihe von der vorigen auf folgende Art:

$$\log.(1+x) = Ax - \tfrac{1}{2}Ax^2 + \tfrac{1}{3}Ax^3 - \tfrac{1}{4}Ax^4 + \tfrac{1}{5}Ax^5 \ldots$$
$$\log.(1-x) = -Ax - \tfrac{1}{2}Ax^2 - \tfrac{1}{3}Ax^3 - \tfrac{1}{4}Ax^4 - \tfrac{1}{5}Ax^5 \ldots$$
$$\quad + \quad + \quad + \quad + \quad +$$

$$\log.(1+x) - \log.(1-x) = 2Ax + \tfrac{2}{3}Ax^3 + \tfrac{2}{5}Ax^5 \ldots$$

oder $\log.(1+x) - \log.(1-x) = 2A[x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 \ldots]$

Nun ist aber $\log.(1+x) - \log.(1-x) = \log.\frac{1+x}{1-x}$ (§. 14. 2. Abschn., S. 35.)

also ist $\log.\frac{1+x}{1-x} = 2A[x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 \ldots]$

Es sey nun eine beliebige Zahl $n = \frac{1+x}{1-x}$ und man entwickle aus dieser Gleichung den Werth von x, so findet man $x = \frac{n-1}{n+1}$. Man substituire diesen Werth in der Reihe statt x, so ist

$$\log. n = 2A\left[\frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^7 \ldots\right]$$

und da der natürliche Logarithmus der Zahl n mit $l.\,n$ bezeichnet wird, und in diesem Fall $A = 1$ ist, so ist

$$l.\,n = 2\left[\frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^5 \ldots\right] \text{ oder}$$

$$l.\,n = 2\,\frac{n-1}{n+1}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^6 \ldots\right]$$

In dieser Reihe ist allemal $\frac{n-1}{n+1}$ ein ächter Bruch, also werden die Glieder immer kleiner, oder die Reihe ist convergent.

§. 14. Wenn z. B. der natürliche Logarithmus der Zahl 2 auf sieben Decimalstellen berechnet werden soll, so ist $n = 2$, $n - 1 = 1$, $n + 1 = 3$, also $\frac{n-1}{n+1} = \frac{1}{3}$, also

$$l.\,2 = 2 \,.\, \tfrac{1}{3}\left[1 + \tfrac{1}{3}\,.\,(\tfrac{1}{3})^2 + \tfrac{1}{5}\,.\,(\tfrac{1}{3})^4 + \tfrac{1}{7}\,.\,(\tfrac{1}{3})^6 + \tfrac{1}{9}\,.\,(\tfrac{1}{3})^8 + \tfrac{1}{11}\,.\,(\tfrac{1}{3})^{10} + \tfrac{1}{13}\,.\,(\tfrac{1}{3})^{12} + \tfrac{1}{15}\,.\,(\tfrac{1}{3})^{14}\right]$$

Die

Die Berechnung geschicht bequem auf folgende Art:

$\frac{1}{3} = 0{,}33333333$

$(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{3}$ dividirt mit 3, ist $= 0{,}11111111$

$(\frac{1}{3})^4 = (\frac{1}{3})^2$ dividirt mit 9 ist $= \frac{0{,}11111111}{9}$

$= 0{,}01234567$

$(\frac{1}{3})^6 = (\frac{1}{3})^4$ dividirt mit 9, ist $= \frac{0{,}01234567}{9}$

$= 0{,}00137174$

$(\frac{1}{3})^8 = (\frac{1}{3})^6$ dividirt mit 9, ist $= \frac{0{,}00137174}{9}$

$= 0{,}00015241$

auf ähnliche Art findet man

$(\frac{1}{3})^{10} = 0{,}00001693$

$(\frac{1}{3})^{12} = 0{,}00000188$

$(\frac{1}{3})^{14} = 0{,}00000020$

Nun wird das zweite Glied mit 3, das folgende mit 5, das folgende mit 7 u. s. w. dividirt, und alle Quotienten nebst dem ersten Glied 1 der Reihe addirt.

Nemlich:

3	0,11111111	= 0,03703703
5	0,01234567	= 0,00246913
7	0,00137174	= 0,00019596
9	0,00015241	= 0,00001693
11	0,00001693	= 0,00000153
13	0,00000188	= 0,00000014
15	0,00000020	= 0,00000001
		1
	Summe	1,03972073

Die

Die Summe enthält 8 Glieder der Reihe und wird noch mit 2 . $\frac{1}{3}$ oder $\frac{2}{3}$ multiplicirt, nemlich

$$\begin{array}{r} 1{,}03972073 \\ 2 \\ \hline 3)\ 2{,}07944146 \\ \hline 0{,}69314715 \end{array}$$

Die letzte Decimalziffer ist ungewiß, also ist

l. 2 = 0,6931471

§. 15. Auf eine ähnliche Art kann man vermittelst dieser Reihe den Logarithmus einer jeden ganzen Zahl für jedes System berechnen, wenn der Modul A dieses Systems bekannt ist. Nur läuft die Reihe bei großen Zahlen langsam zusammen, so daß in diesem Fall viele Glieder berechnet werden müssen.

§. 16. Indessen kann man noch eine Reihe herleiten, die sehr schnell convergirt, und zwar desto mehr zusammenläuft, je größer die Zahl ist, deren Logarithmus gesucht wird. Allein bei dem Gebrauch derselben wird vorausgesetzt, daß der Logarithmus der Zahl 2 nach der vorigen Art schon berechnet ist, dann kann man aus demselben, vermittelst dieser Reihe, den Logarithmus der Zahl 3 berechnen, dann ferner aus dem Logarithmus von 3 den Logarithmus von 5, das heißt: aus dem Logarithmus einer Primzahl den Logarithmus der

nächst

nächst höhern Primzahl. Denn die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen ergeben sich durch bloße Addition der Logarithmen der Primzahlen. Z. B. Da $4 = 2 . 2$ ist, so ist $\log. 4 = \log. 2 + \log. 2$ oder $= 2 \log: 2$. Da $6 = 2 . 3$ ist, so ist $\log. 6 = \log. 2 + \log. 3$. Da $21 = 3 . 7$ ist, so ist $\log. 21 = \log. 3 + \log. 7$.

Die gedachte Reihe wird auf folgende Art hergeleitet.

§. 17. Man nehme die im §. 13. angegebene Reihe

$$\log. \frac{1+x}{1-x} = 2 A [x + \tfrac{1}{3} x^3 + \tfrac{1}{5} x^5 \ldots]$$

und setze $\frac{1+x}{1-x} = \frac{m^2}{m^2-1}$. Aus dieser Gleichung suche man den Werth von x. Nemlich es ist $m^2 + m^2 x - 1 - x = m^2 - m^2 x$, also $2 m^2 x - x = 1$, oder $(2 m^2 - 1) x = 1$, folglich $x = \frac{1}{2 m^2 - 1}$. Diesen Werth von x substituire man in der Reihe statt x, so ist $\log. \frac{m^2}{m^2-1} = 2 A \left[\frac{1}{2 m^2 - 1} + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2m^2-1}\right]^3 + \frac{1}{5} \left[\frac{1}{2 m^2 - 1}\right]^5 \ldots\right]$

Wenn man diese Reihe, der Kürze wegen mit R bezeichnet, so ist $\log. \frac{m^2}{m^2-1} = 2 AR$.

Es ist aber $\log. \frac{m^2}{m^2-1} = \log. m^2 - \log. (m^2-1)$ (§. 14.)

(§. 14.) Ferner entsteht $m^2 - 1$, wenn man $m + 1$ mit $m - 1$ multiplicirt, d. i. $m^2 - 1 = (m + 1)(m - 1)$. Also ist $\log. (m^2 - 1) = \log. (m+1)(m - 1)$ oder $= \log. (m + 1) + \log. (m - 1)$, folglich ist $\log. m^2 - \log. (m^2 - 1) = \log. m^2 - \log. (m + 1) - \log. (m - 1)$. Es ist aber $\log. m^2 = 2 \log. m$, also ist $\log. m^2 - \log. (m^2 - 1)$ oder $\log. \frac{m^2}{m^2 - 1} = 2 \log. m - \log. (m + 1) - \log. (m - 1)$.

Da nun $\log. \frac{m^2}{m^2 - 1} = 2\ AR$ ist, so ist $2 \log. m - \log. (m + 1) - \log. (m - 1) = 2\ AR$ also

$$\log. m = \frac{\log. (m + 1) + \log. (m - 1)}{2} + AR.$$

oder

$$\log. m = \frac{\log. (m+1) + \log. (m - 1)}{2} + A.$$

$$\left[\frac{1}{2m^2 - 1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2m^2 - 1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2m^2 - 1}\right)^5 \ldots\right]$$

§. 18. Es sey der natürliche Logarithmus von 2 berechnet nach §. 14, so daß $l. 2 = 0{,}6931471$, so ist $l. 4 = 2\ l. 2 = 2 \cdot 0{,}6931471 = 1{,}3862942$. Wenn nun der natürliche Logarithmus von 3 berechnet werden soll, so ist $A = 1$ (§. 10.), $m = 3$, $m + 1 = 4$, $m - 1 = 2$, $m^2 = 9$, $2 m^2 = 18$, und

$2m^2 - 1 = 17$, also $l.\,3 = \frac{l.\,4 + l.\,2}{2} +$
$$\left[\frac{1}{17} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{17}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{17}\right)^5 \ldots\right]$$

oder $l.\,3 = \frac{1{,}3862942 + 0{,}6931471}{2} +$
$$\left[\frac{1}{17} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{17}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{17}\right)^5 \ldots\right]$$

oder $l.\,3 = 1{,}0397206 +$
$$\left\{0{,}0588235 + \frac{1}{3} \cdot \frac{0{,}0588235}{17^2} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{17}\right)^5\right\}$$

oder $l.\,3 = 1{,}0397206 +$
$$\left\{0{,}0588235 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}0002035 + \frac{1}{5} \cdot \frac{0{,}0002035}{17^2}\right\}$$

oder $l.\,3 = 1{,}0397206 + 0{,}0588235 + 0{,}0000678 + 0{,}0000001.$

also $l.\,3 = 1{,}0986120.$

Auf ähnliche Art kann man vermittelst dieser Reihe die Logarithmen aller ganzen Zahlen, auf so viele Decimalstellen man will, sehr leicht berechnen. Die Reihe läuft so schnell zusammen, daß man, um den Logarithmus der Zahl 11 auf 7 Decimalstellen zu berechnen, nur ein einziges Glied zu entwickeln nöthig hat.

§. 19. Bisher wurde blos gezeigt, wie man vermittelst der beiden im §. 13. und §. 17. angegebenen Reihen die natürlichen Logarithmen berechnen kann, indem man den Modul A = 1 setzt. Es ist also 1 der Modul des natürlichen Logarithmischen Systems. (§. 11.) Nimmt man A als 2

oder

oder 3 u. s. f. an, so erhält man Logarithmen für andere logarithmische Systeme. Man kann nun fragen, wie der Modul des gewöhnlichen Briggischen Systems ist, oder wie der Werth der Zahl A ist, womit die Reihen multiplicirt werden müssen, wenn man die Briggischen Logarithmen berechnen will. Dieses findet man auf folgende Art, wobei der Briggische Logarithmus mit log. Brig. bezeichnet ist.

§. 20. Es ist nach §. 13.

$$\log. n = 2 A \left[\frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 \ldots\right]$$

Nun ist die Basis des Briggischen Systems $= 10$, folglich der Briggische Logarithmus der Zahl $10 = 1$, oder log. Brig. $10 = 1$. Ist nun $n = 10$, so ist log. Brig. $n = 1$, $n - 1 = 9$ und $n + 1 = 11$. Folglich, wenn man in obiger Gleichung diese Werthe substituirt, so ist

$$1 = 2 A \left[\frac{9}{11} + \frac{1}{3}.\left(\frac{9}{11}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{9}{11}\right)^5 \ldots\right]$$

Wenn man eine hinlängliche Anzahl Glieder der Reihe berechnet, und sie addirt, so findet man ihre Summe $= 1{,}1512925 \ldots$

also ist $1 = 2 A.\ 1{,}1512925 \ldots$

oder $1 = 2{,}302585\ A$

also $\frac{1}{2{,}302585 \ldots} = A$

oder $0{,}4342944819 \ldots = A$

Dieses ist also der Modul des Brigischen Systems, folglich ist überhaupt:

$$\log. \text{Brig.}\, n = 0{,}4342944819 . 2 \left[\frac{n-1}{n+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 \ldots\right]$$

oder $\log. \text{Brig.}\, n = 0{,}4342944819\ \text{l.}\, n.$

Wenn man die im §. 17. hergeleitete Reihe braucht, so ist

$$\log. \text{Brig.}\, m = \frac{\log.\text{Brig.}(m+1) + \log.\text{Brig.}(m-1)}{2}$$

$$+ 0{,}4342944819 \left[\frac{1}{2m^2-1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{2m^3-1}\right)^3 \ldots\right]$$

§. 21. Wenn also die natürlichen Logarithmen schon berechnet sind, und man will den Briggischen Logarithmus einer Zahl vermittelst des natürlichen Logarithmus dieser Zahl finden, so multiplicirt man den natürlichen Logarithmus mit dem Modul des Briggischen Systems. Nemlich

$$\log. \text{Brig.}\, n = 0{,}4342944819\ \text{l.}\, n.$$

Eben so: $\log. \text{Brig.}\, m = 0{,}4342944819\ \text{l.}\, m.$

Z. B. Nach §. 14. ist der natürliche Logarithmus der Zahl 2 oder $\text{l.}\, 2 = 0{,}6931471$, also ist der Briggische Logarithmus der Zahl $2 = 0{,}4342944 . 0{,}6931471$ oder $= 0{,}30102990390624$. Dieser Logarithmus ist aber nur bis zur 7ten Decimalstelle richtig, weil der natürliche Logarithmus von 2 und der Modul des Briggischen Systems bei der Multipli-

tiplication nur von 7 Decimalstellen angenommen wurden. Wenn man aber den natürlichen Logarithmus von 2 auf mehrere Decimalstellen berechnet, und von dem Modul des Briggischen Systems mehr als 7 Decimalstellen nimmt, so findet man log. Brig. 2 = 0,301029995... Dafür steht in den kleinen logarithmischen Tafeln 0,3010300.

§. 22. Man kann auch, wenn die natürlichen Logarithen als berechnet vorausgesetzt werden, nach §. 2. den Modulus des Briggischen Systems finden. Es ist nemlich überhaupt $\frac{1}{\text{log. B.}} = A.$ Es ist hier aber B die Basis des Briggischen Systems, also = 10, folglich ist $\frac{1}{\text{l. 10.}} = A.$ d. h. wenn man 1 mit dem nat. Log. von 10 dividirt. so erhält man den Modulus des Briggischen Systems. Nun ist l. 10 = 2,30258509,

folglich ist $\frac{1}{2{,}30258509} = 0{,}4342944...$

§. 23. Da log. Brig. n = 0,4342944819 l. n. (§. 21.), so ist: $\frac{\text{log. Brig. n.}}{0{,}4342944819} = \text{l. n.}$

oder $\frac{1}{0{,}4342944819}$ log. Brig. n = l n.

Es ist aber, wenn man den Zähler 1 mit dem Nenner dividirt, der Quotient 2,30258509... also ist 2,30258509 log. Brig. n = l n.

Daher kann man, vermittelst der Tafel der Briggischen Logarithmen, den natürlichen Logarith-

mus einer Zahl finden, wenn man den Briggischen Logarithmus dieser Zahl mit 2,30258509 multiplicirt.

Z. B. Man sucht den natürlichen Logarithmus von 359. Der Briggische Log. von 359 ist nach der Tabelle = 2,5550944, also ist der natürliche Log. von 359 = 2,30258509 . 2,5550944 d.i. = 5,8833223.

§. 24. Man kann auch vermittelst der in §. 2. hergeleiteten Formel $\frac{p}{\log. B.} = x$ den natürlichen Logarithmus einer Zahl a vermittelst des Briggischen Logarithmus dieser Zahl finden. Es ist nemlich hier p = log. Brig. a, B ist die Basis des natürlichen logarithmischen Systems, log. B, ist der briggische Logarithmus dieser Basis, und x ist der gesuchte natürliche Log. der Zahl a. Also ist:

$$\frac{\log. \text{Brig. } a}{\log. \text{Brig. } B} = x = l\,a,$$

d. h. der Briggische Logarithmus der Zahl a mit dem Briggischen Logarithmus der Basis des natürlichen Systems dividirt, giebt den natürlichen Logarithmus der Zahl a.

§. 25. Bei dem Gebrauch dieser Formel wird die Basis des natürlichen logarithmischen Systems als bekannt vorausgesetzt. Wenn solche gefunden werden soll, so nehme man die Gleichung im §. 23.

$$\log. \text{Brig. } n = 0{,}4342944\ l\,n.$$

Es sey nun n die Basis des natürlichen log. Systems, so ist, (vermöge der Definition der Basis,) l n = 1. daher log. Brig. n = 0,4342944.

Man

Man suche also in den Briggischen Tafeln den Logarithmus 0,4342944, so ist die dazu gehörige Zahl die gesuchte Basis des natürlichen logarithmischen Systems.

Es gehört aber zu dem Briggischen Logarithmus 0,4342944 die Zahl 2,7182818, also ist diese die Basis des natürlichen log. Systems, welche gewöhnlich mit dem Buchstaben e bezeichnet wird, oder es ist $e = 2,7182818 \ldots$

Vierter Abschnitt.

Anleitung zur Berechnung der zusammengesezten Formeln,

in denen Wurzelnausziehung von einem beliebigen Grad, und Logarithmen vorkommen.

§. 1.

Wenn in einer geometrischen Progression das erste Glied a, das lezte Glied z, und die Anzahl der Glieder n gegeben ist, so ist (nach der 17ten Formel, der Tabelle für die geometrische Progressionen, Seite 21) die Summe der geometrischen Progression,

oder $$f = \frac{\sqrt[n-1]{z^n} - \sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{z} - \sqrt[n-1]{a}}$$

Z. B. Es sey $a=5$, $z=295245$ und $n=11$, so ist $n-1=10$ also

$$s = \frac{\sqrt[10]{(295245)^{11}} - \sqrt[10]{(5)^{11}}}{\sqrt[10]{295245} - \sqrt[10]{5}}$$

Diese Formel kann nun bequem vermittelst der logarithmischen Tafeln berechnet werden, und zwar auf folgende Art:

Es ist log. 295245 = 5,4701830

also log. $\sqrt[10]{295245}$ = 0,5470183 (2Absch. 4eAufgabe)

und log. $\sqrt[10]{(295245)^{11}}$ = 6,0172013 (5Absch. 3eAufg.)

Ferner ist log. 5 = 0,6989700

also log. $\sqrt[10]{5}$ = 0,0698970

und log. $\sqrt[10]{(5)^{11}}$ = 0,7688670

Es ist aber $\sqrt[10]{295245}$, oder die zu den Logarithmus 0,5470183 gehörige Zahl = 3,523856.

Ferner $\sqrt[10]{(295245)^{11}}$ oder die zu dem Logarithmus 6,0172013 gehörige Zahl = 1040402.

Auch ist $\sqrt[10]{5}$., oder die zu dem Logarithmus 0,0698970 gehörige Zahl = 1,174619.

Endlich $\sqrt[10]{(5)^{11}}$ oder die zu dem Logarithmus 0,7688670 gehörige Zahl = 5,873094

Folglich ist $s = \frac{1040402 - 5,873094}{3,523856 - 1,174619}$

Wenn man diesen Ausdruck wirklich berechnet, so ist

$$s = 442865,5$$

Weil

Weil die ganze Zahl selbst sehr groß, und die Ausziehung der Wurzeln aus unvollkommenen Zahlenpotenzen nur als Näherung zu betrachten ist, so kann man 0,5 weglassen, dann ist $s = 442865$.

§. 2. Wenn in einer geometrischen Progression, das letzte Glied z, der Progressionsexponent m, und die Summe s gegeben ist, so ist, (nach der 12ten Formel der Tabelle, Seite 20) die Anzahl der Glieder, oder $n = \frac{\log. z - \log. [mz - (m-1)s]}{\log. m.} + 1.$

Z. B. Es sey $s = 442865$, $m = 3$, $z = 295245$, und man sucht n, so ist $mz = 885735$, $m - 1 = 2$, und $(m-1)s = 885730$, folglich $mz - (m-1)s = 885735 - 885730$, d. i. $= 5$, und daher

$$n = \frac{\log. 295245 - \log. 5}{\log. 3.} + 1.$$

Es ist aber nach der logarithmischen Tafel $\log. 295245 = 5,4701830$, $\log. 5 = 0,6989700$ und $\log. 3 = 0,4771213$

$$\text{also } n = \frac{5,4701830 - 0,6989700}{0,4771213} + 1.$$

$$\text{oder } n = \frac{4,7712130}{0,4771213} + 1.$$

Wenn man wirklich dividirt, so ist $\frac{4,7712130}{0,4771213} = 10$, dazu 1 addirt, so ist $n = 11$.

§. 3. Es sey folgende Formel gegeben:

$$x = \frac{\log. 100\,a - \log. (100\,a - cp)}{\log. (100 + p) - \log. 100}$$

In

In ihr sey $a = 450$, $c = 8472$ und $p = 5$, so wird bei der Berechnung auf folgende Art verfahren.

Da $a = 450$, so ist $100a = 45000$. Ferner, da $c = 8472$ und $p = 5$, so ist $cp = 42360$, also $100a - cp = 45000 - 42360 = 2640$, und $100 + p = 100 + 5 = 105$. Folglich ist, wenn man in der Buchstabenformel die gehörigen Zahlenwerthe substituirt.

$$x = \frac{\log. 45000 - \log. 2640}{\log. 105 - \log. 100}$$

Nun ist $\log. 45000 = 4{,}6532125$, $\log. 2640$ $3{,}4216039$ und $\log. 105 = 2{,}0211893$ und $\log. 100 = 2$. Folglich ist:

$$x = \frac{4{,}6532125 - 3{,}4216039}{2{,}0211893 - 2}$$

$$\text{d. i. } x = \frac{1{,}2316086}{0{,}0211893}$$

oder wenn man im Zähler und Nenner das Comma um gleichviel Decimalstellen zurückrückt, (nemlich hier um sieben) so ist:

$$x = \frac{12316086}{211893}$$

und wenn man wirklich dividirt, so ist

$$x = 58{,}12\ldots$$

§. 4. Es sey folgende Formel gegeben:

$$\log. z = n \log. \left(\frac{100+p}{100}\right) + \log. c + \log. p - \log. 100 - \log. \left[\left(\frac{100+p}{100}\right)^n - 1\right]$$

und

und es sey $c = 8472$, $p = 5$, und $n = 58$, so ist $100 + p = 105$ und $\frac{100+p}{100} = \frac{105}{100} = 1,05$. Also

$$\log.\left(\frac{100+p}{100}\right) = \log.\ 1,05 = 0,0211893 \text{ und}$$

$$n \log.\left(\frac{100+p}{100}\right) = 58.\ \log.\ 1,05 = 58.\ 0,0211893.$$

Folglich, wenn man wirklich multiplicirt:

$$\begin{array}{r} 0,0211893 \\ 58 \\ \hline 1695144 \\ 1059465 \\ \hline 1,2289794 \end{array} = n \log.\left(\frac{100+p}{100}\right) = \log.\left(\frac{100+p}{100}\right)^n$$

Wenn man also die Zahl aufsucht, welche zu diesem Logarithmus gehört, so hat man $\left(\frac{100+p}{100}\right)^n$ selbst. Nun ist diese Zahl nach der Tabelle $= 16,94257$, also ist $\left(\frac{100+p}{100}\right)^n$ oder $\left(\frac{105}{100}\right)^{58} = 16,94257$, folglich $\left(\frac{100+p}{100}\right)^n - 1$ oder $\left(\frac{105}{100}\right)^{58} - 1 = 15,94257$, und davon der in der Tabelle aufgesuchte Logarithmus, oder $\log.\left[\left(\frac{100+p}{100}\right)^n - 1\right] = 1,2025583$. Uibrigens ist noch $\log.\ c = \log.\ 8472 = 3,9279859$. $\log.\ 100 = 2$. und $\log.\ p$ oder $\log.\ 5 = 0,6989700$. Wenn man nun in der Buchstabenformel die gehörigen Zahlenwerthe substituirt, so ist $\log.\ z = 1,2289794 + 3,9279859 + 0,6989700 - 2 - 1,2025583$.

Nun ist:	1,2289794	
	3,9279859	und 2
	0,6989700	1,2025583
	5,8559353	3,2025583
subtr.	3,2025583	
	log. z = 2,6533770	

Wenn man also in der Tabelle die zu diesem Logarithmus gehörige Zahl aufsucht, so ist z = 450,1704.

Fünfter Abschnitt.

Exponentialgleichungen und ihre Auflösung.

§. 1.

Eine Gleichung, in welcher die unbekannte Größe im Potenzexponenten ist, heißt eine Exponentialgleichung. Z. B. $c^x = d$ oder $cn^{x + m} = d$ oder $c^{nx + m} = d$.

§. 2. Die Auflösung solcher Gleichungen, geschieht am bequemsten vermittelst der Logarithmen.

Nemlich es sey die gegebene Exponentialgleichung $c^x = d$, so ist $\log. c^x = \log. d$. Es ist aber $\log. c^x = x \log. c$ (§. 15. in 2 Abschnitt, Seite 36,) also $x \log. c = \log. d$. Folglich $x = \frac{\log. d}{\log. c}$

§. 3.

§. 3. Es sey ferner die gegebene Exponentialgleichung $c^{x+m} = \log. d$. Da aber $\log. c^{x+m} = (x+m) \log. c$, so ist $(x+m) \log. c = \log. d$. Also $x + m = \frac{\log. d}{\log. c}$. Folglich $x = \frac{\log. d}{\log. c} - m$ Z. B. Es sey die Zahlengleichung $12^{x+3} = 436$, so ist $\log. 12^{x+3} = \log. 436$. Da aber $\log. 12^{x+3} = (x+3) \log. 12$, so ist $(x+3) \log. 12 = \log. 436$. Folglich $x + 3 = \frac{\log. 436}{\log. 12}$, und $x = \frac{\log. 436}{\log. 12} - 3$. Nun ist $\log. 436 = 2{,}6394865$ und $\log. 12 = 1{,}0791812$, also $x = \frac{2{,}6394865}{1{,}0791812} - 3$, oder, wenn man wirklich dividirt, $x = 2{,}445 - 3$, d. i. $x = -555 \ldots$

§. 4. Es sey ferner die gegebene Exponentialgleichung $c^{nx+m} = d$, so ist $\log. c^{nx+m} = \log. d$, also $(nx+m) \log. c = \log. d$, folglich $nx + m = \frac{\log. d}{\log. c}$ und $nx = \frac{\log. d}{\log. c} - m$, daher $x = \frac{\frac{\log. d}{\log. c} - m}{n}$ oder $x = \frac{\log. d}{n \log. c} - \frac{m}{n}$.

§. 5. Auf diese Art wird folgende Aufgabe aufgelößt.

Aus einem Faß Wein, das m Maase enthält, jede zu a Kreuzern am Werth, werden b Maase herausgelassen, und eben so viel Maas Wasser zugegossen. Nachdem sich das Wasser mit dem Wein gleich-

gleichförmig gemischt hat, werden wiederum b Maase dieser Vermischung herausgelassen, und eben so viele Maase Wasser nachgegossen, so daß die Vermischung immer m Maase enthält. Wie oft kann dieses Verfahren wiederholt werden: daß jede Maas der Vermischung, welche sich noch im Fasse befindet, c Kreutzer werth sey?

Es ist die Anzahl Maase der Mischung jedesmal = m, und die Anzahl Maase der Mischung, welche jedesmal herausgelassen werden = b. Ferner sey die veränderliche Anzahl Maase Wein, welche sich bei jedem Herauslassen noch in der Mischung befindet = w, und die veränderliche Anzahl Maase Wein, welche jedesmal herausfliesset = z. Da vorausgesetzt wird, daß sich das Wasser mit dem Wein gleichförmig vermischt, d. h. daß in jeder gleichen Menge Wein gleichviel Wasser enthalten ist, so wird man, wenn z. B. die Mischung aus 24 Maas besteht, in der 23 Maas Wein und 1 Maas Wasser sich befindet, nach folgender Proportion schliesen können.

	Maas Mischung		Maas Misch.		Maas Wein		Maas Wein
oder in allgemeinem	24	:	1	=	23	:	$\frac{23}{24}$
	m	:	b	=	w	:	z

$$\text{also ist } \frac{bw}{m} = z.$$

Nun

Nun sind nach der ersten Abzapfung vor der ersten Mischung noch m-b Maas Wein im Fasse oder vor der ersten Mischung ist $w = m - b$, also $\frac{b(m-b)}{m} = z$.

Werden diese z Maase Wein herausgelassen, so sind nach $m - b - z$ oder $m - b - \frac{b(m-b)}{m}$ Maase Wein im Fasse. Bringt man diesen Ausdruck auf einerlei Benennung so ist er

$= \frac{m^2 - mb - b(m-b)}{m}$ od. $= \frac{m^2 - mb - (mb - b^2)}{m}$

oder $= \frac{m^2 - mb - mb + b^2}{m}$ d. i. $= \frac{m^2 - 2mb + b^2}{m}$.

Es ist aber $m^2 - 2mb + b^2 = (m-b)^2$, also ist dieser Ausdruck $= \frac{(m-b)^2}{m}$. Daher ist nach der 2ten Abzapfung $w = \frac{(m-b)^2}{m}$, folglich ist bei der dritten

Apkapfung $z = \frac{bw}{m} = \frac{b(m-b)^2}{m^2}$. Werden diese z Maase Wein herausgelassen, so bleiben im Fasse $w - z$ Maase Wein, oder $\frac{(m-b)^2}{m} - \frac{b(m-b)^2}{m^2}$.

Dieser Ausdruck ist $= \frac{m^2 - 2mb + b^2}{m}$

$$- \frac{b(m^2 - 2mb + b^2)}{m^2}$$

oder $= \frac{m^3 - 2m^2b + mb^2 - m^2b + 2mb^2 - b^3}{m^2}$

$$\text{d. i.} = \frac{m^3 - 3m^2b + 3mb^2 - b^3}{m^2}$$

Nun

Nun ist $m^3 - 3m^2b + 3mb^2 - b^3 = (m-b)^3$, also ist der Ausdruck $= \frac{(m-b)^3}{m^2}$.

Auf ähnliche Art findet man für die vierte Mischung die Anzahl Maase des im Fasse befindlichen Weins $= \frac{(m-b)^4}{m^3}$, für die fünfte Mischung $= \frac{(m-b)^5}{m^5}$. Nun findet vor der ersten Mischung die erste Abzapfung statt, vor der zweiten Mischung die zweite, vor der dritten Mischung die dritte u. s. f. vor der fünften Mischung die fünfte Abzapfung. Also ist nach der fünften Abzapfung die Anzahl Maase des im Fasse befindlichen Weins $= \frac{(m-b)^5}{m^4}$ folglich nach der nten Abzapfung $\frac{(m-b)^n}{m^{n-1}}$, und nach der xten Abzapfung $= \frac{(m-b)^x}{m^{x-1}}$. Von dieser Menge Wein ist jede Maas a Kreuzer werth, also betragen die Anzahl Maase $\frac{(m-b)^x a}{m^{x-1}}$ Kreutzer.

Da nun die Vermischung m Maase hat, und jede Maas c Kreutzer kosten soll, so ist der Werth der Vermischung $= mc$ Kreutzer.

Folglich hat man die Exponentialgleichung:

$$\frac{(m-b)^x a}{m^{x-1}} = mc$$

aus welcher der Werth x entwickelt werden soll.

Es ist nemlich $(m-b)^x a = mcm^{x-1}$

oder $(m-b)^x a = cm^{x-1} m^1$

oder $(m-b)^x a = cm^{x-1+1}$

d. i. $(m-b)^x a = cm^x$

also $\log. (m-b)^x + \log. a = \log. c + \log. m^x$

d. i. $x \log. (m-b) + \log. a = \log. c + x \log. m$

also $\log. a - \log. c = x \log. m - x \log. (m-b)$

d. i. $\log. a - \log. c = x [\log. m - \log. (m-b)]$

folglich $\frac{\log. a - \log. c}{\log. m - \log. (m-b)} = x$

Beispiel. Es sey

$m = 60$ Maas, $b = 1$ Maas, $a = 48$ Kr., $c = 40$ Kr.,

so ist $x = \frac{\log. 48 - \log. 40}{\log. 60 - \log. 59}$

d. i. $x = \frac{1,6812412 - 1,6020600}{1,7781512 - 1,7708520}$

oder $x = \frac{0,0791812}{0,0072992}$

d. i. $x = \frac{791812}{72992}$

Wenn man wirklich dividiret, so findet man $x = 10,83 \ldots$

Nemlich, wenn man die Abzapfung 10mal wiederholt, so ist die Vermischung noch etwas besser als ein Wein, von dem die Maas 40 Kr. kostet, wiederholt man sie aber 11mal, so ist die Maas der Vermischung etwas weniger als 40 Kr. werth.

§. 6. Es sey folgende Exponentialgleichung gegeben, welche aufgelöset werden soll.

$$m^x c - m^{x-1} a - m^{x-2} a \ldots - ma - a = q$$

Also ist

$$m^x c - [m^{x-1} a + m^{x-2} a \ldots + ma + ma + a] = q$$

oder $m^x c - a [m^{x-1} + m^{x-2} \ldots + m + 1] = q$

oder $m^x c - a [1 + m + m^2 \ldots + m^{x-2} + m^{x-1}] = q$

Die in der Klammer enthaltene Reihe $1 + m + m^2 \ldots m^{x-2} + m^{x-1}$ hat so viele Glieder, als x Einer hat, nemlich 1 ist das erste Glied, m, das zweite Glied, m^2 das dritte, m^3 das vierte m^4 das fünfte Glied, u. s. f. also m^{x-2} das $x - 1$te Glied. u. m^{x-1} das xte Glied. Ferner ist diese Reihe eine geometrische Progression, deren erstes Glied $= 1$, der Progressionsexponent $= m$, und das letzte Glied $z = m^{x-1}$ ist. Folglich kann die Summe s dieser Reihe nach der 19ten Formel der Tabelle, (Seite 21) berechnet werden. Nach dieser Formel ist $s = \frac{zm - a}{m - 1}$. Wenn man in ihr die gehörigen Werthe, nemlich $a = 1$ und $z = m^{x-1}$ substituirt, so ist die Summe der gegenwärtigen Progression $= \frac{m^{x-1} m - 1}{m - 1}$, oder $s = \frac{m^{x-1} m^1 - 1}{m - 1}$, d. i. $s = \frac{m^{x-1+1} - 1}{m - 1}$ oder $s = \frac{m^x - 1}{m - 1}$

Da also $1 + m + m^2 \ldots + m^{x2} + m^{x-1} = \frac{m^x - 1}{m - 1}$

so

so ist $a[1+m+m^2 \ldots + m^{x-2} + m^{x-1}] = \frac{a(m^x-1)}{m-1}$

Folglich in der obigen Gleichung

$$m^x c - a\,[1+m+m^2 \ldots + m^{x-2} + m^{x-1}]$$
$$= m^x c - \frac{a(m^x-i)}{m-1}$$

und da $m^x c - a[i+m+m^2 \ldots + m^{x-2} + m^{x-1}] = q$ ist,

so ist auch $m\;\; c - \frac{a(m^x-1)}{m-1} = q$

folglich $m^x c\,(m-1) - a(m^x-1) = q\,(m-1)$

oder $-q\,(m-1) = a\,(m^x-1) - m^x c\,(m-1)$

folglich $-q\,(m-1) = m^x a - a - m^x c\,(m-1)$

also $a - q\,(m-1) = m^x a - m^x c\,(m-1)$

oder $a - q\,(m-1 = m^x\,[a - c\,(m-1)]$

und $\frac{a-q\,(m-1)}{a-c\,(m-1)} = m^x$

Da nun die anfängliche verwickelte Exponentialgleichung in eine einfache Exponentialgleichung verwandelt ist, so bedient man sich der Logarithmen, um sie aufzulösen. Es ist nemlich

$\log.\,[a-q\,(m-1)] - \log.\,[a-c\,(m-1)] = \log.\,m^x$

folglich $\log.\,[a-q\,(m-1)] - \log.\,[a-c(m-1)] = x \log.\,m$

also $\frac{\log.\,[a-q\,(m-1)] - \log.\,[a-c(m-1)]}{\log.\,m} = x$

Zum Beispiel. Es sey $a = 1560$, $q = 16$, $m = 1{,}05$ und $c = 6000$, so ist $m-1 = 0{,}05$ und $q(m-1) = 16.0{,}05 = 0{,}8$. Ferner $c\,(m-1) = 6000.0{,}05$

$= 300$,

$= 300$, $a-q(m-1) = 1560 - 0{,}8 = 1559{,}2$ und $a-c(m-1) = 1560 - 300 = 1260$. Also

$$x = \frac{\log.\ 1559{,}2 - \log.\ 1260}{\log.\ 1{,}05}$$

oder $$x = \frac{3{,}1929017 - 3{,}1003705}{0{,}0211893}$$

d. i. $$x = \frac{0{,}0925312}{0{,}0211893}$$

Wenn man wirklich dividirt, so ist $x = 4{,}36\ldots$

Sechster Abschnitt.

Von den Reihen, welche aus einer arithmetischen und geometrischen Progression zusammengesetzt sind.

§. 1.

Es sey eine Reihe gegeben, von der Form

$$a,\ (a+d)b,\ (a+2d)b^2\ (a+3d)^3,\ (a+4d)b^4$$

so bilden a, $a+d$, $a+2d$ u. s. f. eine arithmetische Progression, und b, b^2, b^3 u. s. f. eine geometrische Progression. Ferner ist jedes Glied dieser Reihe ein Product aus zwei Factoren, wovon der eine zu der arithmetischen und der andere zur geometrischen Progression gehört. Z. B. das Glied $(a+3d)b^3$ besteht aus den beiden Factoren $a+3d$ und b^3, wovon

von der eine $a+3d$ zur arithmetischen, und der andere b^3 zur geometrischen Progression gehört.

§. 2. Die Formel, welche angiebt, wie eine solche Reihe summirt werden soll, wird auf folgende Art abgeleitet.

Man multiplicire die Factoren eines jeden Gliedes mit einander, so erhält man

$$a + ab + db + ab^2 + 2db^2 + ab^3 + 3db^3 + ab^4 + 4db^4$$

Ferner zerlege man die Glieder, welche Coefficienten haben, nemlich es ist $2db^2 = db^2 + db^2$, und $3db^3 = db^3 + db^3 + db^3$ u. s. f. Hierauf ordne man die Glieder der Reihe auf folgende Art:

$$\begin{array}{l} a \\ + ab + db \\ + ab^2 + db^2 + db^2 \\ + ab^3 + db^3 + db^3 + db^3 \\ + ab^4 + db^4 + db^4 + db^4 + db^4 \end{array}$$

Betrachtet man die verticalen Columnen von oben nach unten, so sieht man leicht, daß sie geometrische Progressionen sind. Man nehme also die Glieder der ersten Columne $a + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4$ und summire sie. Es ist nemlich das erste Glied $= a$, das letzte Glied $z = ab^4$ und der Progressionsexponent $m = b$, wenn man also die Summirungsformel (in der Tabelle, Seite 21) $\int = \frac{zm - a}{m - 1}$ anwendet, und ab^4 statt z, und b statt m substituirt,

so ist die gesuchte Summe $\int = \frac{ab^4 b - a}{b - 1}$ od. $\int = \frac{ab^5 - a}{b - 1}$

Hierauf nehme man die Glieder der zweiten Columne

$$db + db^2 + db^3 + db^4$$

in dieser geometrischen Progression ist das erste Glied $a = db$, das letzte $z = db^4$ und der Progressionsexponent $m = b$. Man suche die Summe wiederum vermittelst der Formel $\int = \frac{zm - a}{m - 1}$, so ist hier

$\int = \frac{db^4 b - db}{b - 1}$ oder $\int = \frac{db^5 - db}{b - 1}$ d. i. $\int = \frac{db^5}{b - 1}$ $- \frac{db}{b - 1}$.

In der Reihe der dritten Columne $db^2 + db^3 + db^4$, ist das erste Glied $a = db^2$ das letzte $z = db^4$ und der Progressionsexponent $m = b$. Man findet also die Summe dieser Reihe, vermittelst der gedachten Summirungsformel $\int = \frac{db^4 b - db^2}{b - 1}$, das ist $\int = \frac{db^5 - db^2}{b - 1}$ oder $\int = \frac{db^5}{b - 1} - \frac{db^2}{b - 1}$.

Auf ähnliche Art findet man die Summe der Reihe $db^3 + db^4$ in der vierten Columne $= \frac{db^5 - db^3}{b - 1}$, oder $= \frac{db^5}{b - 1} - \frac{db^3}{b - 1}$.

Endlich ist die Summe der fünften Columne $= db^4$, oder wenn man mit $b - 1$ multiplicirt und dividirt $= \frac{db^4 (b - 1)}{b - 1}$, d. i. $= \frac{db^5 - db^4}{b - 1}$, oder $= \frac{db^5}{b - 1} - \frac{db^4}{b - 1}$.

Nun

Nun findet man die Summe S der Reihen in allen Columnen, wenn man diese einzelnen Summen addirt, oder es ist

$$S = \frac{ab^5-a}{b-1} + \frac{db^5}{b-1} - \frac{db}{b-1} + \frac{db^5}{b-1} - \frac{db^2}{b-1} + \frac{db^3}{b-1}$$

$$- \frac{db^3}{b-1} + \frac{db^5}{b-1} - \frac{db^4}{b-1} \text{ oder } S = \frac{ab^5-a}{b-1} + \frac{4db^5}{b-1}$$

$$- \left[\frac{db}{b-1} + \frac{db^2}{b-1} + \frac{db^3}{b-1} + \frac{db^4}{b-1}\right]$$

also $S = \frac{ab^5-a+4db^5}{b-1} - \frac{db+db^2+db^3+db^4}{b-1}$

Es ist aber $db + db^2 + db^3 + db^4$ nach obiger Formel $= \frac{db^5-db}{b-1}$,

folglich ist $S = \frac{ab^5-a+4db^5}{b-1} - \frac{db^5-db}{(b-1)^2}$.

§. 3. Dieses ist also die Summe der gegebenen Reihe von fünf Gliedern. Gesetzt, die gegebene Reihe habe sechs Glieder, z. B.

$$a+(a+d)b+(a+2d)b^2+(a+3d)b^3+(a+4d)b^4$$
$$+(a+5d)b^5$$

so kommt zur vorigen Reihe noch hinzu $(a+5d)b^5$ oder zu den verticalen Columnen wird unten hinzugesetzt $ab^5 + db^5 + db^5 + db^5 + db^5 + db^5$. Wenn man also jede dieser verticalen Columnen summirt, so ist die erste $a+ab+ab^2+ab^3+ab^4+ab^5$, und davon die Summe $= \frac{ab^6-a}{b-1}$.

Die zweite verticale Columne ist $db + db^2 + db^3 + db^4 + db^5$, und ihre Summe $= \frac{db^6 - db}{b - 1}$ oder $= \frac{db^6}{b-1} - \frac{db}{b-1}$.

Die Summe der dritten verticalen Columne ist

$$= \frac{db^6}{b-1} - \frac{db^2}{b-1}.$$

Die Summe der vierten verticalen Columne ist

$$= \frac{db^6}{b-1} - \frac{db^3}{b-1}.$$

Die Summe der fünften verticalen Columne ist

$$= \frac{db^6}{b-1} - \frac{db^4}{b-1}.$$

Endlich ist die Summe der sechsten verticalen Columne $= db^5$, oder $= \frac{db^5(b-1)}{b-1}$, d. i. $= \frac{db^6}{b-1} - \frac{db^5}{b-1}$.

Also die Summe aller sechs Columnen oder $S = \frac{ab^6 - a}{b-1} + \frac{5db^6}{b-1} - \frac{db + db^2 + db^3 + db^4 + db^5}{b-1}$

Nun ist die Summe von $db + db^2 + db^3 + db^4 + db^5$ nach der Summirungsformel $= \frac{db^6 - db}{b-1}$

folglich ist $S = \frac{ab^6 - a + 5db^6}{b-1} - \frac{db^6 - db}{(b-1)^2}$.

§. 4. Vergleicht man diese Formel der Summe der Reihe von 6 Gliedern, mit der vorigen Formel $S = \frac{ab^5 - a + 4db^5}{b-1} - \frac{db^5 - db}{(b-1)^2}$ für die

Sum-

Summe der Reihe von 5 Gliedern, so bemerkt man, daß die Nenner $b-1$ und $(b-1)^2$ die nemlichen sind, und sich blos in den Zählern Unterschiede finden.

Nemlich das erste Glied ist in der Summirungsformel der Reihe von fünf Gliedern $= ab^5$, und in der Summirungsformel der Reihe von sechs Gliedern $= ab^6$. Es ist leicht einzusehen, daß es bei einer Reihe von sieben Gliedern $= ab^7$, bei einer Reihe von acht Gliedern $= ab^8$ und bei einer Reihe von n Gliedern $= ab^n$ seyn wird.

Das zweite Glied — a bleibt ungeändert.

Das dritte Glied ist in der Summirungsformel der Reihe von fünf Gliedern $= 4db^5$ und in der für die Reihe von sechs Gliedern $5db^6$. Man sieht aus der Herleitung der Summirungsformel, daß dieser Ausdruck aus dem letzten Gliede der Reihe entsteht. Nemlich bei der ersten Reihe von fünf Gliedern war das letzte Glied $(a+4d)b^4$ oder $= ab^4+4db^4$ und $4db^4$ ist $= db^4 + db^4 + db^4 + db^4$, jeder dieser Ausdrücke wurde bei der Summirung mit b multiplicirt, daraus entstund $db^5 + db^5 + db^5 + db^5$, endlich wurden diese Ausdrücke addirt, dieses gab $4db^5$. Bei der zweiten Reihe von sechs Gliedern war das letzte Glied $(a+5d)b^5$, daraus wurde auf ähnliche Art $5db^6$ hergeleitet. Bei einer Reihe von sieben Gliedern, wird

wird das letzte Glied $(a+6d)b^6$ seyn, und daraus $6db^7$ hergeleitet werden. Endlich bei einer Reihe von n Gliedern wird das letzte $= (a+(n-1)b^{n-1}$ seyn, und daraus $(n-1)db^n$ hergeleitet werden.

Die beiden Glieder in dem zweiten Zähler entstehen auf folgende Art. Bei der Summirungsformel der Reihe von fünf Gliedern, aus der Summe von $db + db^2 + db^3 + db^4$. Bei der Summirungsformel der Reihe von sechs Gliedern aus der Summe von $db + db^2 + db^3 + db^4 + db^5$. Eben so bei einer Reihe von sieben Gliedern aus der Summe von $db + db^2 + db^3 + db^4 + db^5 + db^6$, u. s. f. Folglich bei einer Reihe von n Gliedern, aus $db + db^2 + db^5 ... + db^{n-1}$. Davon ist aber (nach der 19ten Formel, Seite 21) die Summe $= \frac{db^n - db}{b-1}$.

Also sind in diesem Falle die beiden Glieder in dem zweiten Zähler $= db^n - db$.

§. 5. Wenn daher die gegebene Reihe n Glieder hat, oder von der Form ist:

$a, (a+d)b, (a+2d)b^2, (a+3d)b^3 .. (a+(n-1)d)b^{n-1}$

so ist ihre Summe oder

$$S = \frac{ab^n - a + (n-1)db^n}{b-1} - \frac{db^n - db}{(b-1)^2}$$

oder einfacher:

$$S = \frac{[a+(n-1)d]b^n - a}{b-1} \quad \frac{(b^n - b)d}{(b-1)^2}$$

Z. B.

Z. B. Es sey folgende Zahlenreihe von 8 Gliedern gegeben:

1, 9, 45, 189, 729, 2673, 9477, 32805

Diese Reihe ist =

$$1+3.3+5.9+7.27+9.81+11.243+13.729+15.2187$$

d. h. sie ist aus der arithmetischen Progression 1, 3, 5, 7 u. s. f. deren Differenz = 2 ist, und aus der geometrischen, 3, 3^2, 3^3, 3^4 u. s. f. deren Exponent = 3 ist, zusammengesetzt.

Diese Reihe kann also vermittelst obiger Formel summirt werden. Es ist hier nemlich a = 1, d = 2, b = 3 und n = 8, folglich ist

$$S = \frac{[1+7.2]3^8 - 1}{3-1} - \frac{(3^8-3)2}{(3-1)^2}$$

$$\text{oder } S = \frac{15.6561 - 1}{2} - \frac{(6561-3)2}{4}$$

$$\text{d. i. } S = \frac{98415 - 1}{2} - \frac{6558}{2}$$

$$\text{oder } S = \frac{98414 - 6558}{2}$$

endlich S = 45928.

§. 6. Wenn die Reihe folgende Form hat: $ac, (a+d)cb, (a+2d)cb^2 \ldots (a+(n-1)cb^{n-1}$ so kann sie auch leicht summirt werden.

Denn diese Reihe entsteht, wenn die vorige Reihe $a, (a+d)b, (a+2d)b^2$ u. s. f. mit c multiplicirt wird.

Wenn also die Summe der vorigen Reihe $= S$ ist, so ist die Summe dieser Reihe $= cS$. Das heißt: die Summirungsformel S im §. 5. darf blos mit c multiplicirt werden.

§. 7. Wenn die gegebene Reihe folgende Form hat:

$$db,\ 2db^2,\ 3db^3,\ 4db^4 \ldots (n-1)\,db^{n-1}$$

so ist sie ebenfalls leicht zu summiren.

Denn sie entsteht, wenn in der Reihe $a, (a+d)b, (a+2d)b^2$ u. s. f. die Größe $a = 0$ gesetzt wird. Alsdann hat aber diese Reihe ein Glied weniger, als die, in welcher a vorkommt, weil das erste Glied a wegfällt. Wenn also die Reihe, in der a vorkommt, n Glieder hat, so hat diese Reihe $n-1$ Glieder. Folglich setzt man in der Summirungsformel des 5 §. statt a Null, so ist die Summe dieser Reihe von $n-1$ Gliedern

$$\frac{[0+(n-1)d]\,b^n - 0}{b-1} - \frac{(b^n-b)\,d}{(b-1)^2}$$

oder die Summe ist $= \dfrac{(n-1)db^n}{b-1} \quad \dfrac{(b^n-b)d}{(b-1)^2}$

Nimmt man an die Reihe habe n Glieder, so muß in dieser Formel n statt $n-1$, ferner $n+1$ statt n gesetzt werden, so ist die Summe $=$

$$\frac{ndb^{n+1}}{b-1} - \frac{(b^{n+1}-b)\,d}{(b-1)^2}$$

§. 8.

§. 8. Wenn die gegebene Reihe diese Form hat: $a, (a-d)^1 b, (a-2d)b^2, (a-3d)b^3 \ldots (a-(n-1)d)b^{n-1}$ so kann sie auf folgende Art summirt werden.

Man betrachte in der Reihe von n Gliedern, welche im 5. §. angegeben ist, die Differenz d als negativ, so entstehet diese Reihe. Folglich setzt man in der Summirungsformel, welche im 5. §. bestimmt wurde — d statt d, so hat man die Summe dieser Reihe von n Gliedern. Es ist nemlich die gesuchte Summe =

$$\frac{[a+(n-1)(-d)]\,b^n-a}{b-1} - \frac{(b^n-b)(-d)}{(b-1)^2}$$

oder die Summe, ist $= \frac{[a-(n-1)d]\,b^n-a}{b-1} + \frac{(b^n-b)d}{(b-1)^2}$

Z. B. Es sey folgende Zahlenreihe von 8 Gliedern gegeben, deren Summe gefunden werden soll.

$26+92+320+1088+3584+11264+32768+81920$

Wenn man diese Reihe zerlegt, so ist sie =

$$26+23.4+20.16+17.64+14.256+11.1024 + 8.4096+5.16384$$

oder sie ist $= 26+23.4+20.4^2+17.4^3+14.4^4 + 11.4^5+8.4^6+5.4^7$

Sie ist also aus der arithmetischen abnehmenden Progression, 26, 23, 20 u. s. f. deren Differenz = 3 ist, und aus der geometrischen zunehmenden Progression 4, 4^2, 4^3 u. s. f. deren Exponent = 4 ist, zusammengesetzt.

Hier

Hier ist $a = 26$, $b = 4$, $d = 3$ und $n = 8$, also $n - 1 = 7$ u. $b - 1 = 3$. folglich ist die Summe $=$

$$\frac{(26 - 7.3)\,4^8 - 26}{3} + \frac{(4^8 - 4)3}{9}$$

oder die Summe ist $= \frac{5.65536 - 26}{3} + \frac{65536 - 4}{3}$ wenn man diesen Ausdruck wirklich berechnet, so findet man die Summe der gegebenen Reihe $= 131062$.

§. 9. Die gegebene Reihe sey:

$(n-1)d + (n-2)\,dr + (n-3)dr^2 \ldots + 2dr^{n-3} + dr^{n-2}$

Wenn diese Reihe summirt werden soll, so muß man zuerst bestimmen, wie die Anzahl ihrer Glieder auszudrücken ist. Dieses kann vermittelst des Potenzexponenten von r gefunden werden, dieser ist bei dem zweiten Glied $= 1$, (denn r ist $= r^1$), bei dem dritten Glied $= 2$, bei dem vierten Glied wäre er $= 3$, u. s. f. immer um eins weniger als die Anzahl der Glieder. Wenn also diese Reihe n Glieder hätte, so wäre im letzten Glied der Potenzexponent von $r = n - 1$, folglich das letzte Glied $= dr^{n-1}$. Da es aber dr^{n-2} ist, so hat diese Reihe nur $n - 1$ Glieder. Das heißt nemlich, wenn diese Reihe in allen 12 Glieder hätte, oder die Anzahl der Glieder $= 12$ wäre, so wäre $12 = n - 1$ und folglich $n = 13$.

Hierauf vergleiche man sie mit der Reihe im 8ten §, welche n Glieder hat,

a +

$a + (a-d)b + (a-2d)b^2 \ldots + (a-(n-1)d)b^{n-1}$ in dieser ist a das erste Glied, und in der gegebenen Reihe ist $(n-1)d$ das erste Glied. Also ist $a = (n-1)d$. Ferner ist $(a-d)b$ das zweite Glied, und in der gegebenen Reihe ist $(n-2)dr$ das zweite Glied. Es ist also $b = r$, und $a - d = (n-2)d$. Da aber $a = (n-1)d$ war, so ist, wenn man diesen Werth statt a substituirt, $(n-1)d - d = (n-2)d$, oder, wenn man wirklich multiplicirt,

$nd-d-d = nd-2d$, d. i. $nd - 2d = nd-2d$, also $nd = nd$, folglich $d = d$, d. h. die Differenz der arithmetischen Progression in den beiden verglichenen Reihen ist einerlei. Man setze nun $(n-1)d$ statt a, und r statt b in der Summirungsformel des 8ten §.

$$\frac{[a-(n-1)d]b^n-a}{b-1} + \frac{(b^n-b)d}{(b-1)^2}$$

so erhält man

$$\frac{[(n-1)d-(n-1)d]r^n-(n-1)d}{r-1} + \frac{(r^n-r)d}{(r-1)^2}$$ od. da $(n-1)d-(n-1)d =$ Null ist, so ist $[(n-1)d-(n-1)d]r^n = 0r^n$ d. i. Null. Also ist die Formel:

$$-\frac{(n-1)d}{r-1} + \frac{(r^n-r)d}{(r-1)^2}$$

oder die Summe der gegebenen Reihe ist

$$\frac{(r^n-r)d}{(r-1)^2} - \frac{(n-1)d}{r-1}$$

Z. B. Die gegebene Reihe sey $18+150+1200+9000+60000+300000$. Wenn

Wenn man sie zerlegt, so ist sie $= 6.3 + 5.3.10 + 4.3.10^2 + 3.3.10^3 + 2.3.10^4 + 1.3.10^5$. Hier ist $n-1 = 6$, also $n = 7$, ferner $d = 3$ und $r = 10$, also $r-1 = 9$ und $(r-1)^2 = 81$. Folglich die Summe dieser Reihe $= \frac{3(10^7-10)}{81} - \frac{6.3}{9}$

Wenn man die Berechnung macht, so findet sich die Summe $= 370368$.

§. 10. Es sey die gegebene Reihe

$$a + \frac{a+d}{r} + \frac{a+2d}{r^2} + \frac{a+3d}{r^3} \ldots + \frac{a+(n-1)d}{r^{n-1}}$$

Wenn diese summirt werden soll, so vergleiche man solche in §. 5. mit der Reihe $a + (a+d)b + (a+2d)b^2 + (a+3d)b^3 \ldots + (a+(n-1)d)b^{n-1}$. Man sieht leicht, daß die gegebene Reihe aus dieser letztern entsteht, wenn man $\frac{1}{r}$ statt b, $\frac{1}{r^2}$ statt b^2 u. s. w. setzt. Denn $\frac{a+d}{r}$ ist so viel als $(a+d)\frac{1}{r}$, nemlich mit r dividiren heißt mit $\frac{1}{r}$ multipliciren. Daher ist auch $\frac{a+2d}{r^2}$ so viel als $(a+2d)\frac{1}{r^2}$ u. s. w. Folglich darf man nur in der Summirungsformel des 5ten §. $\frac{1}{r}$ statt b, u. $\frac{1}{r^n}$ statt b^n substituiren, so hat man die Summirungsformel der gegebenen Reihe von n Gliedern.

Diese Summe ist also =

$$\frac{\left[a+(n-1)d\right]\frac{1}{r^n}-a}{\frac{1}{r}-1}-\frac{\left(\frac{1}{r^n}-\frac{1}{r}\right)d}{\left(\frac{1}{r}-1\right)^2}$$

Man kann sie auf folgende Art bequemer ausdrücken:

$$\frac{a-\left[a+(n-1)d\right]\frac{1}{r^n}}{1-\frac{1}{r}}+\frac{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r^n}\right)d}{\left(1-\frac{1}{r}\right)^2}$$

Z. B. die gegebene Reihe sey = $5+\frac{7}{3}+1+\frac{11}{27}+\frac{13}{81}$. Wenn man sie zerlegt, so ist sie $=5+\frac{7}{3}+\frac{9}{9}+\frac{11}{27}+\frac{13}{81}$

oder $=5+\frac{7}{3}+\frac{9}{3^2}+\frac{11}{3^3}+\frac{13}{3^4}$

d. i. $=5+\frac{5+2}{3}+\frac{5+4}{3^2}+\frac{5+6}{3^3}+\frac{5+8}{3^4}$.

Hier ist $a=5$, $d=2$, $r=3$, $n=5$. Also die Summe $=\frac{5-\left[5+4.2\right]\frac{1}{3^5}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^5}\right)2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}$

oder $=\frac{5-\frac{13}{243}}{\frac{2}{3}}+\frac{\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{243}\right)}{\frac{4}{9}}$

d. i. $= \dfrac{3\left(5-\frac{13}{243}\right)}{2} + \dfrac{9\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{243}\right)}{4}$

Wenn man die Rechnung gehörig ausführet, so ist die gesuchte Summe der gegebenen Reihe $= 8\frac{73}{81}$.

Diese Formel läßt sich, wenn man sie gehörig reducirt, für die Zahlenberechnung noch bequemer so ausdrücken:

$$\frac{r\left[(r-1)a+d\right] - \left[(r-1)a+\left((r-1)n+1\right)d\right]\frac{1}{r^{n-1}}}{(r-1)^2}$$

Z. B. Es sey wie vorhin $a=5$, $d=2$, $r=3$, $n=5$, so ist $r-1=2$, $\frac{1}{r^{n-1}}=\frac{1}{3^4}$, also ist die Summe $= \dfrac{3[10+2]-[10(+10+1)2]\frac{1}{81}}{4}$

oder $= \dfrac{36-\frac{32}{81}}{4}$ d. i. $= 9-\frac{8}{81}$, oder $= 8\frac{73}{81}$.

§. 11. Es sey die gegebene Reihe

$$\frac{a}{r}+\frac{a+d}{r^2}+\frac{a+2d}{r^3}+\frac{a+3d}{r^4}\ldots+\frac{a+(n-1)d}{r^n}$$

Wenn man diese Reihe mit der Reihe $a+\frac{a+d}{r}+\frac{a+2d}{r^2}\ldots$ welche in dem vorigen 10. §. summirt wurde, vergleicht, so sieht man, daß sie aus dieser letztern entsteht, wenn man jedes Glied dieser letztern mit r dividirt, oder mit $\frac{1}{r}$ multiplicirt, d. h. es ist

$$\frac{a}{r}+\frac{a+d}{r^2}+\frac{a+2d}{r^3}\ldots=\frac{1}{r}\left[a+\frac{a+d}{r}+\frac{a+2d}{r^2}\ldots\right]$$

Wenn

Wenn man also die gegebene Reihe $\frac{a}{r} + \frac{a+d}{r^2} + \frac{a+2d}{r^3}$ u. s. f. summiren soll, so multiplicire man die Summirungsformel des 10. §. mit $\frac{1}{r}$, oder dividire sie mit r. Folglich ist die Summe der gegebenen Reihe von n Gliedern =

$$\frac{a - \left[a + (n-1)d\right]\frac{1}{r^n}}{r-1} + \frac{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^n}\right)d}{r\left(1 - \frac{1}{r}\right)^2}.$$

oder wenn man die zweite bequemere Formel des vorigen Paragraphs anwendet, und sie mit r dividiret, so ist die Summe der gegebenen Reihe von n Gliedern =

$$\frac{(r-1)a + d - \frac{1}{r^n}\left[(r-1)a + \left((r-1)n + 1\right)d\right]}{(r-1)^2}$$

Siebenter Abschnitt.

Von dem Interusurium, oder der Staffelrechnung.

§. 1.

Wenn jemand Geld entlehnt, so heißt das, was er für die Benützung des entlehnten Capitals

entrichtet, die Zinsen des Capitals. Man bestimmt sie gewöhnlich so, daß man für hundert Stücke des Capitals, eine gewisse Anzahl Stücke des nemlichen Werths festsetzt, z. B. 5 oder 6 fl. u. s. f. von 100 fl., oder 5 Thaler u. s. f. von 100 Thalern. Man nennt diese Bestimmung Procent. Z. B. 5 fl. Zins von 100 fl. Capital, heißt 5 Procent, 6 fl. Zins von 100 fl. Capital, heißt 6 Procent.

§. 2. Wenn von einem Capital c, der Zins f am Ende des Termins, da er fällig ist, bezahlt wird, das Capital c aber stehen bleibt, so ist am Ende des zweiten Termins, der mit dem ersten gleiche Dauer hat, der Zins wiederum = f, am Ende des dritten Termins, der ebenfalls dem ersten gleich ist, der Zins wiederum = f. Z. B. Wenn von 1000 fl. der jährliche Zins 50 fl. ist, so wird am Ende des ersten Jahres 50 fl. bezahlt, am Ende des zweiten Jahres wiederum 50 fl. u. s. f. Also beträgt die Summe der Zinsen nach 2 Jahren 2mal 50, nach 3 Jahren 3mal 50, nach 4 Jahren 4mal 50, nach n Jahren nmal 50 fl., oder es wird in der doppelten Zeit zweimal, in der dreifachen Zeit dreimal, in der nfachen Zeit nmal so viel Zinsen bezahlt, als in der einfachen Zeit. Folglich verhalten sich die Zinsen wie die Zeiten. Solche Zinsen heisen einfache Zinsen.

§. 3.

§. 3. Wenn daher die Frage ist, wie hoch wächst ein Capital c in n Jahren an, wenn das jährliche Procent k ist, so schliese man

$$100 : k = c : \frac{kc}{100}$$

Der Werth $\frac{kc}{100}$ ist der jährliche Zins des Capitals c.

Jahr. Jahren. Zins. Zins.

Ferner schliese man $1 : n = \frac{kc}{100} : \frac{nkc}{100}$

so ist $\frac{nkc}{100}$ die Summe der während der n Jahre bezahlten Zinse. Werden diese zum Capital geschlagen, so ist $c + \frac{nkc}{100}$ oder $\frac{100c + nkc}{100}$ oder $\frac{100 + nk}{100} c$ der Werth des Capitals c nach n Jahren mit den dazu gerechneten einfachen Zinsen.

Das nemliche findet man, wenn man so schließt: Wenn das jährliche Procent $= k$ ist, so beläuft sich 100 am Ende des ersten Jahres, mit den dazu gerechneten einfachen Zinsen k, auf $100 + k$, z. B. 100 fl. zu 5 p. c. belaufen sich nach einem Jahre mit den dazu gerechneten einfachen Zinsen auf 105 fl.

Ferner 100 beläuft sich am Ende des zweiten Jahres, mit dem dazu gerechneten zweijährigen einfachen Zins 2k, auf $100 + 2k$, z. B. 100 fl. zu 5 p. c. belaufen sich nach zwei Jahren auf $100 + 2.5$ oder auf 110 fl.

Ferner 100 beläuft sich am Ende des dritten Jahres, mit dem dazu gerechneten dreijährigen einfachen Zins 3k, auf $100 + 3k$, u. f. f.

Also beläuft sich 100 am Ende des nten Jahres, mit dem dazu gerechneten njährigen Zins nk auf $100+nk$.

Nun schliese man: 100 beläuft sich nach n Jahren auf $100+nk$, wie hoch beläuft sich das Capital c nach n Jahren, mit den dazu gerechneten n jährigen Zinsen. D. h.

$$100 : 100+nk = c : \frac{(100+nk)c}{100}$$

so ist $\frac{(100+nk)c}{100}$ der gesuchte Werth des Capitals c. Dieser sey $= h$.

Z. B. Wie hoch belaufen sich 10500 fl. nach 10 Jahren, mit den dazu gerechneten einfachen Zinsen zu 5 p. c.

Hier ist $c = 10500$, $k = 5$, $n = 10$, also $nk = 50$, folglich ist $h = \frac{(100+nk)c}{100} = \frac{150.10500}{100}$, oder $= 15750$ fl.

§. 4. Da $\frac{(100+nk)c}{100} = h$ ist, so kann man aus dieser Gleichung c finden, wenn man h als bekannt und c als unbekannt annimmt. Denn es ist

$$(100+nk)c = 100\,h$$

folglich $c = \frac{100\,h}{100+nk}$

Vermittelst dieser Formel findet man den gegenwärtigen Werth c des nach n Jahren zu bezahlenden Capitals h, wenn man einfache Zinsen zu

k jähr-

k jährlichen Procent rechnet, oder man discontirt das Capital h.

Z. B. Er hat A nach einem Vertrag dem B das Capital h = 15750 fl. nach 10 Jahren zu bezahlen, so daß A während dieser Zeit dieses Capital noch benützen oder die Zinsen davon ziehen darf. Nun entschließt sich A, seine Schuld dem B sogleich abzutragen. Es ist klar, daß A dem B jetzt den Werth c zu bezahlen hat, d. h. so viel, daß wenn B die empfangene Summe c ausleihet, und die Zinsen davon aufhebet, am Ende des zehnten Jahres das erhaltene Capital c, nebst den dazu gelegten einfachen Zinsen, den Werth des Capitals h ausmacht. Es ist also der reducirte oder discontirte Werth von h, d. i. $c = \frac{100h}{100 + nk}$

Hier ist h = 15750, n = 10, der Werth von k bestimmt sich durch Uibereinkunft, nach den landesüblichen jährlichen Zinsen vom Hundert, es sey in diesem Fall k = 5, so ist nk = 50, und

$$c = \frac{100 . 15750}{150}$$

$$\text{oder } c = \frac{157500}{15} \text{ d. i. } c = 10500 \text{ fl.}$$

Wenn B diese 10500 fl. sogleich erhält und zu 5 p. c. ausleihet, so tragen sie ihm am Ende eines Jahres 525 fl. Zins, also in 10 Jahren 5250 fl. Zins, diese zu den erhaltenen 10500 fl. gerechnet,

 macht

macht am Ende des zehnten Jahres 10500 + 5250 oder 15750 fl., welche er am Ende dieses Zeitraums zu fordern hatte.

§. 5. Der Unterschied zwischen dem künftigen und jetzigen Werth eines Capitals, d. i. h—c, heißt, wenn einfache Zinsen gerechnet werden, das einfache Disconto, oder der einfache Rabat. In dem vorigen Zahlenbeispiel ist er 15750 fl. — 10500 fl. oder 5250 fl.

Man findet ihn auch aus dem Ausdruck h—c, wenn man statt c den Werth $\frac{100h}{100+nk}$ substituirt. Es sei nemlich der einfache Rabat $= g$ so ist

$$h - \frac{100h}{100+nk} = g \text{ oder } \frac{100h+nkh-100h}{100+nk} = g,$$

d. i. $\frac{nkh}{100+nk} = g$. Oder $100+nk : nk = h : g$.

Z. B. Es sey $h = 15750$, $n = 10$ u. $k = 5$, so ist

$$\frac{10.\,5.\,15750}{150} = g$$

oder $\frac{50.\,1575}{15} = g$

also $5250 = g$ wie vorhin.

Dann findet man $c = h - g$, oder $c = 15750 - 5250$, d. i. $= 10500$ fl.

§. 6. Wenn man das in dem 4ten §. angeführte Beispiel näher untersucht, und auf das Beste des Schuldners Rücksicht nimmt, so findet man,

daß

daß wenn der Schuldner A dem Gläubiger B das nach 10 Jahren fällige Capital von 15750 fl. gegenwärtig mit 10500 fl. abträgt, er zu viel bezahlt. Denn da B von den erhaltenen 10500 fl. nach einem Jahr, zu 5 p. c. gerechnet, 525 fl. Zins einnimmt, so kann er diesen erhaltenen Zins ausleihen, und neun Jahre lang jährlich 26¼ fl. Zinsen davon ziehen, dieses trägt den Gläubiger B ausser den 5250 fl. Zinsen noch 236¼ fl. Zins. Er kann aber auch eben so den am Ende des zweiten Jahres erhaltenen Zins, der wieder 525 fl. beträgt, ausleihen, und 8 Jahre lang den Zins davon ziehen, der während dieser Zeit 210 fl. beträgt, u. f. f. Er kann auch die jährlichen 26¼ fl. durch Ausleihen benützen. Kurz, er zieht, wenn er das erhaltene Capital bis zu dem Zeitpunkt, wo es ihm eigentlich ausbezahlt werden sollte, gehörig benützt, Zinsen von Zinsen, so lange bis die Zinseszinsen so unbeträchtlich werden, daß er sie nicht weiter ausleihen kann, so, daß er also am Ende des zehnten Jahres viel mehr als 15750 fl. besitzt. In dieser Absicht ist es gewöhnlich, bei solchen Aufgaben, welche das Interusurium oder die Reduction und das Disconiren eines Capitals betreffen, die Rechnung mit Zins von Zins anzuwenden. Man nennt sie die Rechnung mit zusammengesetzten Zinsen, und sie beruht auf folgenden Gründen.

§. 7.

§. 7. Es sey das jährliche Procent $= k$, und das anfängliche Capital $= c$. Wenn man von 100 am Ende des ersten Jahres k Zinsen erhält, und diese zu hundert rechnet, so steigt 100 am Ende des ersten Jahres auf $100 + k$, oder wenn man im Anfang des ersten Jahres 100 fl. besitzt, diese ausleiht, am Ende des Jahres k fl. Zinsen erhält, und diese zu den 100 fl. schlägt, so hat man am Ende des ersten Jahres $100 + k$ fl. Man schliese nun, 100 steigt in einem Jahr auf $100 + k$, wie hoch beläuft sich c nach einem Jahr mit dem dazu gerechneten jährigen Zins, oder

$$100 : 100 + k = c : \frac{100+k}{100}c$$

so ist $\frac{100+k}{100}c$ der Werth des Capitals c am Ende des ersten Jahres mit dem dazu gerechneten Zins.

Nun betrachte man den Werth $\frac{100+k}{100}c$ als ein neues Capital, welches wieder auf ein Jahr ausgeliehen wird, bezeichne es mit C, und suche wie vorhin den Werth von C nach Verlauf eines Jahres mit dem dazu gerechneten jährigen Zins, in dem man schlieset $100 : 100 + k = C : \frac{100+k}{100}C$ so ist $\frac{100+k}{100}C$ der gesuchte Werth des Capitals C. Man substituire in diesem Ausdruck statt C den Werth $\frac{100+k}{100}c$, so giebt dieses $\frac{100+k}{100} \cdot \frac{100+k}{100}c$,

oder

oder $\frac{(100+k)^2}{100^2}c$ oder $\left(\frac{100+k}{100}\right)^2 c$. Dieser Ausdruck ist der Werth des anfänglichen Capitals c mit dem dazu gerechneten Zins von Zinsen, oder den zusammengesetzten Zinsen am Ende des zweiten Jahres. Man betrachte diesen Werth als ein neues Capital = D, und suche wie vorhin den Werth von D nach Verlauf eines Jahrs mit dem dazu gerechneten jährigen Zins.

$$100 : 100+k = D : \frac{100+k}{100}D$$

so ist $\frac{100+k}{100}D$ der gesuchte Werth des Capitals D. In diesem Ausdruck substituire man statt D den ihm gleichen Werth $\left(\frac{100+k}{100}\right)^2 c$, so giebt dieser $\frac{100+k}{100}\cdot\left(\frac{100+k}{100}\right)^2 c$ oder $\left(\frac{100+k}{100}\right)^3 c$. Dieser Ausdruck ist der Werth des anfänglichen Capitals c mit den dazu gerechneten zusammengesetzten Zinsen am Ende des dritten Jahres.

Setzt man diesen Ausdruck = E, so findet man für das folgende Jahr $\frac{100+k}{100}E$, und nach gehöriger Substitution $\left(\frac{100+k}{100}\right)^4 c$ als den Werth von c mit den zusammengesetzten Zinsen am Ende des vierten Jahres.

Am Ende des fünften Jahres wird also der Werth von c seyn = $\left(\frac{100+k}{100}\right)^5 c$

Am

Am Ende des sechsten Jahres $\left(\frac{100+k}{100}\right)^6 c$

Folglich, wenn der Werth von c mit den dazu gerechneten zusammengesetzten Zinsen am Ende des nten Jahres mit H bezeichnet wird, so ist

$$H = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n c$$

Z. B. Wie hoch belaufen sich 10500 fl. nach 10 Jahren mit den dazu gerechneten zusammengesetzten Zinsen zu 5 Procent.

Hier ist $k = 5$, $n = 10$, und $c = 10500$ also

$$H = \left(\frac{105}{100}\right)^{10} . \ 10500$$

Zur bequemen Berechnung gebraucht man die Logarithmen. Es ist nemlich

$$\log. H = 10 \log. \frac{105}{100} + \log. 10500$$

oder $\log. H = 10 (\log. 105 - \log. 100) + \log. 10500$

Nun ist $\log. 105 = 2{,}0211893$

$\log. 100 = 2$

also $\log. \frac{105}{100}$, od. $\log. 1{,}05 = 0{,}0211893$

mult. mit 10   10

$0{,}2118930$

$\log. 10500 = 4{,}0211893$

$\log. H = 4{,}2330823$

Folglich $H = 17103{,}39$ Gulden.

Aehnliche Exempel zur Uibung.

1) Wie hoch beläuft sich ein Capital von 8700 fl. nach 16 Jahren, mit den zusammengesetzten Zinsen, zu 5 Procent? Antw. Auf 18991,01 fl.

2) Ein Capital von 6000 fl. steht auf Zinseszinsen zu 4 Procent, wie groß ist sein Werth nach 32 Jahren? Antw. 21048,28 fl, oder 21048 fl. 16 Kr.

3) Wie ist der Werth eines Capitals von 38364 fl. mit zusammengesetzten Zinsen nach 54 Jahren zu $4\frac{1}{2}$ Procent? Ant. 413241,5 fl. oder 413241 fl. 30 Kr.

4) In einem Lande sind 350000 Menschen. Wenn nun die Bevölkerung im ersten Jahre um 7000 Menschen zunimmt, wie groß ist die Volksmenge nach 100 Jahren? (Man schliese zuerst 350000 Menschen geben in einem Jahr 7000 Menschen Zunahme, wieviel geben 100? so findet man 2 Procent.) Antw. 2535642 Menschen.

§. 8. Wenn berechnet werden soll, wie hoch sich das Capital c nach $24\frac{3}{4}$ Jahren mit den zusammengesetzten Zinsen beläuft, oder wenn in der Formel $H = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n c$ der Potenzexponent n eine gemischte Zahl, hier $24\frac{1}{4}$ ist, so giebt diese Formel nicht ganz den richtigen Werth von H. Um diesen zu erhalten, setze man $n = m + \frac{f}{g}$, so daß m, f

und

und g ganze Zahlen bedeuten, und g größer als f ist, so ist der Anwachs des Capitals c nach m Jahren $= \left(\frac{100+k}{100}\right)^m c$. Es werde dieser Ausdruck als Capital betrachtet und $=$ L gesetzt, oder es sey $\left(\frac{100+k}{100}\right)^m c = L$. Wenn nun 100 in einem Jahr k Zinsen tragen, so giebt das Capital L in einem $\frac{kL}{100}$ Zinsen. Ferner verhält sich 1 Jahr zu den $\frac{f}{g}$ Theil eines Jahres wie der jährliche $\frac{kL}{100}$ Zins, zu dem Zins den das Capital L, während des Theils $\frac{f}{g}$ eines Jahres trägt, oder

$$\begin{array}{cccc} \text{Jahr} & \text{Jahr} & \text{Zins} & \text{Zins} \\ 1 : & \frac{f}{g} = & \frac{kL}{100} : & \frac{fkL}{100g} \end{array}$$

Wenn man nun statt L den Werth $\left(\frac{100+k}{100}\right)^m c$ substituirt, so ist $\frac{fk}{100g}\left(\frac{100+k}{100}\right)^m c$ der Zins des Capitals L während des Theils $\frac{f}{g}$ eines Jahres. Also ist M oder der Werth des Capitals c mit den zusammengesetzten Zinsen nach $m + \frac{f}{g}$ Jahren $=$

$$\left(\frac{100+k}{100}\right)^m c + \frac{fk}{1000}\left(\frac{100+k}{109}\right)^m c, \text{ oder } =$$

$$\left[1 + \frac{fk}{100g}\right]\left(\frac{100+k}{100}\right)^m c.$$

Folglich $\log. M = \log. \left[1 + \frac{fk}{100g}\right]$

$+ m\,[\log.(100+k) - \log. 100] + \log. c.$

Z. B. Wie ist der Werth von 265000 fl. nach 36 Jahren 5 Monaten mit den zusammengesetzten Zinsen zu $5\frac{1}{2}$ Procent?

Es

Es sind 36 Jahre 5 Monate $= 36\frac{5}{12}$ Jahre. Also $m = 36$, $\frac{f}{g} = \frac{5}{12}$, folglich $f = 5$ und $g = 12$, ferner $c = 265000$ und $k = 5\frac{1}{2}$.

Daher $1 + \frac{fk}{100g} = 1 + \frac{5 \cdot 5\frac{1}{2}}{1200} = 1 + \frac{5 \cdot 11}{2400} = 1 + \frac{55}{2400} = 1 + \frac{11}{480} = \frac{491}{480}$, also $\log. \left[1 + \frac{fk}{100g}\right] = \log. \frac{491}{480} = \log. 491 - \log. 480$. Nun ist

$$\log. 491 = 2,6910815$$
$$\log. 480 = 2,6812412$$
$$\text{also } \log. \left[1 + \frac{fk}{100g}\right] = 0,0098403$$

Ferner ist $\log. (100 + k) = \log. 105\frac{1}{2} = \log. 105,5$. Es ist aber

$$\log. 105,5 = 2,0232525$$
$$\log. 100 = 2$$
$$\log. (100 + k) - \log. 100 = 0,0232525$$

Mult. mit 36 — 36

1395150
697575

0,8370900

ferner ist $\log. 265000 = 5,4232459$
und $\log. \left[1 + \frac{fk}{100g}\right] = 0,0098403$

Summe, oder $\log. M. = 6,2701762$

Die dazu gehörige Zahl ist $= 1862842$. Folglich ist der gesuchte Werth M des Capitals $c = 1862842$ fl.

§. 9.

§. 9. Wollte man dieses Beispiel vermittelst der Formel $H = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n c$ oder log. H = n [log. (100+k) − log. 100] + log. c berechnen, so wäre $n = 36\frac{5}{12}$, also log. H = $36\frac{5}{12}$ [log. 105,5 − log. 100] + log. 265000

Es ist aber

log. 105,5 − log. 100 = 0,0232525
mult. mit $36\frac{5}{12}$ 36

```
                    1395150
                    697575
                    ---------
                    0,8370900
                    0,0232525
                            5
                    ---------
               12|0,1162625|0,0096885
                     82
                     106
                      102
                        65
       Also zu      0,8370900
        addirt      0,0096885
                    ---------
```

$36\frac{5}{12}$ [log. 105,5 − log. 100] = 0,8467785
log. 265000 = 5,4232459

log. H = 6,2700244

Also H = 1862191 fl. Wenn man diesen Werth mit dem vorigen richtigen Werth 1862842 fl. vergleicht, so findet man, daß er um 651 fl. kleiner ist.

Exem-

Exempel zur Uibung.

1) Wie ist der Werth eines Capitals von 17800 fl. nach $13\frac{1}{2}$ Jahren zu 6 Procent mit den zusammengesetzten Zinsen? Antw. 39105,14 fl. oder 39105 fl. 8 Kr.

2) Welchen Werth hat ein Capital von 8350 fl. mit den zusammengesetzten Zinsen zu 4 Procent nach 8 Jahren 7 Monat? Antw. 11694,18 fl. oder 11694,18 fl. oder 11694 fl. 10 Kr.

§. 10. Gesetzt, die Zinsen werden halbjährig, oder vierteljährig, oder monatlich ausbezahlt, und sogleich wieder zu dem Capital geschlagen, so wird der Anwachs des Capitals viel beträchtlicher seyn, als wenn die Zinsen blos am Ende eines jeden Jahres zu dem Capital geschlagen werden. Nemlich, wenn gesucht wird, wie groß der Werth eines Capitals c mit zusammengesetzten Zinsen nach n Jahren ist, wenn das jährliche Procent $= k$ ist, und die Zinsen nach Verlauf des mten Theils eines Jahres zu dem Capital geschlagen werden, so ist $n = nm$ solcher Theile. Z. B. wenn der Werth des Capitals c nach 14 Jahren gesucht wird, so ist $n = 14$, werden nun die Zinsen halbjährig zu dem Capital geschlagen, so ist $m = 2$, und der mte Theil des Jahres $\frac{1}{2}$ Jahr, folglich n oder $14 = 14.2$ halbe Jahre, oder 28 halbe

halbe Jahre, werden die Zinsen vierteljährig zu dem Capital geschlagen, so ist m = 4, der mte Theil des Jahres = $\frac{1}{4}$ Jahr, und n oder 14 = 14.4 d. i. 56 Vierteljahre, werden aber die Zinsen monatlich zu dem Capital geschlagen, so ist m = 12, der mte Theil des Jahres $\frac{1}{12}$ Jahr, und n oder 14 = 14.12 d. i. 168 Zwölftelsjahre. Ist nun das Procent jährlich = k, so ist es für den mten des Jahres $\frac{k}{m}$. Z. B. Wenn das jährliche Procent = 5 ist, so ist es für das halbe Jahr $\frac{5}{2}$, für das Vierteljahr $\frac{5}{4}$, für das Monat $\frac{5}{12}$, für zwei Monat $\frac{5}{6}$, denn 2 Monate sind der sechste Theil des Jahres. Es sey also der Werth eines Capitals c mit zusammengesetzten Zinsen, nach n Jahren, wenn das jährliche Procent = k ist, und die Zinsen am Ende eines jeden mten Theils des Jahres zu dem Capital geschlagen werden, = M, so kann der Werth von M aus der Formel $H = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n c$ hergeleitet werden, wenn man nm statt n, und $\frac{k}{m}$ statt k setzt. Also ist $M = \left(\frac{100+\frac{k}{m}}{100}\right)^{nm} c$

oder logarithmisch ausgedrückt

$$\log. M = nm\left[\log.\left(100+\frac{k}{m}\right) - \log. 100\right] + \log. c$$

Z. B. Wie groß ist der Werth von 10500 fl. nach 10 Jahren, wenn die Zinsen halbjährig zu dem

dem Capital geschlagen werden, und jährlich 5 Procent gerechnet wird? Hier ist $n = 10$, $m = 2$, $k = 5$, $c = 10500$, also $nm = 20$ und $\frac{k}{m} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} = 2,5$.

Folglich $M = \left(\frac{102,5}{100}\right)^{20} . 10500$

und $\log. M = 20[\log. 102,5 - \log. 100] + \log. 10500$

$$\begin{array}{rl} \text{Es ist aber } \log. 102,5 & = 2,0107239 \\ \log. 100 & = 2 \\ \hline \log. 102,5 - \log. 100 & = 0,0107239 \\ \text{multipl. mit } 20 & 20 \\ \hline & 0,2144780 \\ \log. 10500 & = 4,0211893 \\ \hline \log. M & = 4,2356673 \end{array}$$

Also $M = 17205,5$ oder 17205 fl. 30 Kr.

Aehnliche Exempel zur Uibung.

1) Wie groß ist der Werth von 10500 fl. nach 10 Jahren, wenn die Zinsen vierteljährig zu dem Capital geschlagen werden, und 5 das jährliche Procent ist? Antw. 17257,95 oder 17257 fl. 57 Kr.

2) Wie ist der Anwachs eines Capitals von 38364 fl. nach 54 Jahren, wenn die Zinsen halbjährig zum Capital geschlagen werden, und jährlich $4\frac{1}{2}$ vom Hundert gezahlt wird? Antw. 424189,8 oder 424189 fl. 48 Kr.

§. 11. In der Formel $H = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n c$ kann man H, k und n als gegeben betrachten, und c als unbekannt suchen, so ist $\frac{H}{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n} = c$, und wenn man mit Logarithmen rechnet, so ist $\log. H - n \log. \frac{100+k}{100} = \log. c$ oder

$\log. H - n(\log. (100+k) - \log. 100) = \log. c.$

Diese Formel dient dazu, den Werth eines am Ende der Zeit n zu bezahlenden Capitals H auf den gegenwärtigen Werth c zu reduciren oder zu discontiren, wenn man auf zusammengesetzte Zinsen Rücksicht nimmt. (Siehe §. 6.)

Z. B. Es hat A nach einem gewissen Vertrag dem B ein Capital von 15750 fl. am Ende des zehnten Jahres, von jetzt an gerechnet, zu bezahlen, so, daß A während dieser Zeit das Capital noch benutzen darf. Er entschließt sich aber seine Schuld dem B jetzt zu entrichten. Wie viel hat A jetzt zu zahlen, oder wie ist der gegenwärtige Werth c des Capitals H, wenn zusammengesetzte Zinsen zu 5 Procent jährlich gerechnet werden?

In diesem Beispiel ist H = 15750 fl. n = 10, k = 5, folglich

$\log. c = \log. 15750 - 10 [\log. 105 - \log. 100]$

Nun

Nun ist log. 105 = 2,0211893
log. 100 = 2

log. 105 − log. 100 = 0,0211893
Multipl. mit 10 10

0,2118930

Ferner ist log. 15750 = 4,1972806

Rest = log. c = 3,9853876

Also c = 9669,133 oder 9669 fl. und fast 8 Kr. So viel hat also A dem B sogleich baar zu bezahlen.

Aehnliche Exempel zur Uibung.

1) Jemand hat nach acht Jahren 4500 fl. zu bezahlen. Wie viel hat er für diese Summe sogleich baar zu entrichten, wenn 4 Procent discontirt und zusammengesetzte Zinsen in Anschlag gebracht werden? Antw. 3288,108 fl. oder 3288 fl. 6 Kr.

2) Es hat jemand nach zwölf Jahren 8000 fl. zu fordern, wie viel ist diese Summe jetzt baar werth, wenn 5½ Procent und zusammengesetzte Zinsen gerechnet werden? Antw. 4207,847 fl. oder 4207 fl. 50 Kr.

3) Zu einem Gut, das verkauft werden soll, melden sich drei Kauflustige. Der erste bietet 30000 fl. baar, der zweite 33500 fl. nach 3 Jahren ohne Zinsen zu bezahlen, und der dritte 40000 fl. nach 7 Jah-

 ren,

ren, unter der nemlichen Bedingung. Welches von diesen drei Geboten ist das beste, wenn die Zinsen zu 5 Procent gerechnet, und zusammengesetzte Zinsen in Anschlag gebracht werden?

(Zuerst werden die 33500 fl. als H betrachtet, und der gegenwärtige baare Werth c dieses Capitals gesucht. Eben so verfährt man mit den 40000 fl.)

Antwort. Der reducirte Werth der 33500 fl. ist 28938,56 fl. und der reducirte Werth der 40000 fl. 28427¼ fl. Folglich hat der erste am meisten geboten, der zweite fast 1062 fl. weniger, und der dritte fast um 1573 fl. weniger.

§. 12. Der Unterschied zwischen dem Capital H das nach n Jahren zahlbar ist, und dem auf jetzt reducirten baaren Werth desselben = c, giebt das zusammengesetzte Disconto oder den zusammengesetzten Rabat R, d. h. R = H − c.

Z. B. In dem vorigen Exempel ist H = 15750, c = 9669,133 also der zusammengesetzte Rabat = 15750 − 9669,133 Gulden, oder 6080,867 fl.

§. 13. Wenn $\left(\frac{100+k}{100}\right)^n = r$ gesetzt wird, so ist $\frac{1}{r} = \frac{1}{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n}$, d. i. $= \frac{100}{(100+k)^n}$. Da nun nach §. 11. $\frac{H}{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n} = c$ ist, so ist $\frac{H}{r} = c$,

oder

oder $\frac{1}{r}H$ = c. Da nun H — c = R, (§. 12.), so ist $H - \frac{1}{r} H = R$, d. i. $\left(1 - \frac{1}{r}\right) H = R$, und durch Substitution $\left[1 - \left(\frac{100}{100+k}\right)^n\right] H = R$. Vermittelst dieser Formel kann man auch den zusammengesetzten Rabat R finden.

Z. B. Wie viel beträgt der zusammengesetzte Rabat von 15750 fl. die nach 10 Jahren zahlbar sind, wenn jährlich 5 Procent gerechnet werden. Es ist $\log. \left[1 - \left(\frac{100}{100+k}\right)^n\right] + \log. H = \log R.$ Folglich, da H = 15750, k = 5 und n = 10 ist, so ist

$$\log. \left[1 - \left(\frac{100}{105}\right)^{10}\right] + \log. 15750 = \log. R$$

Es ist log. 100 = 2, oder = 2 + 7 — 7, d. i. = 9 — 7
Also 9, — 7. (Siehe den Zusatz
log. 105 = 2,0211893 am Ende des Buchs.)

$\log. \frac{100}{105} = 6,9788107 - 7$

Multipl. mit 10 10 10

$\log. \left(\frac{100}{105}\right)^{10} = 69,7881070 - 70$

oder = 6,7881070 — 7

Die nach Seite 76 dazu gehörige Zahl 0,6139132 ist also $= \left(\frac{100}{105}\right)^{10}$. Folglich $1 - \left(\frac{100}{105}\right)^{10} =$ 1 — 0,6139132 = 0,3860868. Davon ist der Logarithmus = 6,5866849 — 7 (§. 39. S. 64)

dazu log. 15750 = 4,1972806

Also log. R. = 3,7839655

 Folg-

Folglich der zusammengesetzte Rabat R = 6080,867 fl. oder 6080 fl. 52 Kr.

Aehnliche Exempel zur Uibung.

1) Wie ist der zusammengesetzte Rabat eines Capitals von 4500 fl., das nach 8 Jahren zahlbar ist, wenn 4 Procent discontirt werden? Antwort. 1211,892 fl. oder 1211 fl. 53 Kr.

2) Wie ist der zusammengesetzte Rabat eines Capitals von 8000 fl., das nach 12 Jahren zahlbar ist, zu $5\frac{1}{2}$ Procent? Antw. 3792,153 fl. oder 3792 fl. 9 Kr.

§. 14. Wenn in der Formel $H = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n c$ die Werthe H, c und k gegeben sind, und n gesucht wird, so kann man n auf folgende Art entwickeln. Es ist $\log. H = n \log. \frac{100+k}{100} + \log. c$

oder $\log. H = n\,[\log.(100+k) - \log. 100] + \log. c$

also $\log. H - \log. c = n\,[\log.(100+k) - \log. 100]$

folglich $\frac{\log. H - \log. c}{\log.(100+k) - \log. 100} = n$

So findet man die Anzahl der Jahre = n, welche das Capital c zu k Procent stehen muß, wenn daraus mit dazu gerechneten zusammengesetzten Zinsen das Capital H entstehen soll.

Gesetzt, man fragt nach den Zeitpunkt, da das Capital H ein gewisser Vielfaches, z. B. das mfache

des

des Capitals c wird, so ist $H = mc$, folglich die Formel

$$\frac{\log. mc - \log. c}{\log. (100 + k) - \log. 100} = n$$

oder

$$\frac{\log. m + \log. c - \log. c}{\log. (100 + k) - \log. 100} = n$$

folglich

$$\frac{\log. m}{\log. (100 + k) - \log. 100} = n$$

Z. B. Nach wie viel Jahren verdoppelt sich ein Capital von beliebiger Größe, wenn zusammengesetzte Zinsen zu jährlichen 5 Procent dazu geschlagen werden?

Hier ist m das Doppelte, also $= 2$ und $k = 5$, folglich

$$\frac{\log. 2}{\log. 105 - \log. 100} = n$$

Nun ist $\log. 2 = 0{,}3010300$
und $\log. 105 - \log. 100 = 0{,}0211893$
also, wenn man dividiret

0,0211893|0,3010300|14,2
891370
437980

Folglich verdoppelt sich das Capital nach 14,2 Jahren.

Aehnliche Exempel zur Uibung.

1) Nach wie viel Jahren steigt ein Capital auf den dreifachen Werth, wenn man die zusam-

men-

mengesetzten Zinsen zu dem Capital rechnet, zu 5 Procent? Antw. Nach 22,5 Jahren.

2) Nach wie viel Jahren steigt ein Capital auf den vierfachen Werth, zu 5 Procent? Antw. Nach 28,4 Jahren.

3) Nach wie viel Jahren verdoppelt sich ein Capital zu 6 Procent? Antw. Nach 11,8 Jahren.

4) In einem Lande leben 350000 Menschen, wenn nun die Bevölkerung im ersten Jahr um 7000 Menschen zunimmt, nach wie viel Jahren wird sich die Volksmenge verdoppeln? (Man schliese zuerst, 350000 geben in einem Jahr 7000, wie viel geben 100? so findet man 2 Procent, also ist

$$\frac{\log. 2}{\log. 102 - \log. 100} = n.)$$

Antw. Nach 35 Jahren.

§. 15. Wenn in der Formel $H = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n c$, die Werthe H, c und n gegeben sind, und k gesucht wird, so kann k auf folgende Art entwickelt werden.

$$\frac{H}{c} = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n.$$

$$\text{also } \sqrt[n]{\frac{H}{c}} = \frac{100+k}{100}$$

$$\text{und } 100\sqrt[n]{\frac{H}{c}} = 100+k$$

und

und mit Logarithmen $\log. 100 + \frac{\log. H - \log. c}{n} =$ $\log. (100 + k)$

Z. B. Ein Capital von 15750 fl. das nach 10 Jahren zahlbar ist, wird gegenwärtig mit 9669,133 fl. abgetragen und zusammengesetzte Zinsen dabei angenommen, wie hoch wurde das jährliche Procent gerechnet?

Hier ist $H = 15750$, $c = 9669{,}133$ und n 10 also

$$\log. 100 + \frac{\log. 15750 - \log. 9669{,}133}{10} = \log. (100 + k)$$

Nun ist $\log. 15750 = 4{,}1972806$

$\log. 9669{,}133 = 3{,}9853876$

Rest $= 0{,}2118930$

Dividirt mit 10 $= 0{,}0211893$

$\log. 100 = 2{,}$

$\log. (100 + k) = 2{,}0211893$

Also $100 + k = 105$, folglich $k = 105 - 100$ oder $k = 5$.

Exempel zur Uibung.

In einem gewissen Lande vermehrte sich die Volksmenge jährlich in gleichem Verhältnisse, und zwar so, daß die Bevölkerung in einem Zeitraume von sechs Jahren von 1000000 auf 1771561 Menschen anwuchs, um welchen Theil nahm die Volksmenge jährlich zu? [Hier ist $H = 1771561$, $c = 1000000$

und

und $n = 6$ wenn man mit Logarithmen nach obiger Formel rechnet, so findet man $100 + k = 110$ also $k = 10$. Nun schliese man $100 : 10 = 1 : \frac{1}{10}$). Antw. Um den zehnten Theil der am Anfang eines jeden Jahres vorhandenen Volksmenge.

Achter Abschnitt.

Bestimmung der Veränderung einer Größe, die in gleichen Zeiträumen um das nemliche Procent zunimmt, aber in den nemlichen Zeiträumen um einerlei Größe vermehrt oder vermindert wird.

---

§. 1.

Diese Bestimmung läßt sich am faßlichsten durch Aufgaben zeigen, welche zugleich die verschiedenen Fälle, die dabei vorkommen können, enthalten.

Erste Aufgabe.

Jemand hat ein Capital c zu k jährlichen Procent auf Zinsen ausstehen, er braucht jährlich die Summe a, die größer ist als der jährliche Zins des Capitals c, welche er am Ende eines jeden Jah-

Jahres wegnimmt, nach wie viel Jahren ist der Rest des Capitals $= q$?

Da 100 jährlich k Zins tragen, so trägt c am Ende des ersten Jahres $\frac{kc}{100}$ Zins. Diesen Zins nimmt der Capitalist ein, da er aber kleiner ist als die Summe a, welche der Capitalist jährlich braucht, so muß er von dem Capital am Ende des ersten Jahres noch etwas $= x$ wegnehmen, welches mit dem eingenommenen jährlichen Zins der Summe a gleich ist, so daß also $\frac{kc}{100} + x = a$ ist. Daraus folgt $x = a - \frac{kc}{100}$. Am Anfang des zweiten Jahres beträgt also das ausstehende Capital nur noch $c - x$, oder $c - \left(a - \frac{kc}{100}\right)$ d. i. $c - a + \frac{kc}{100}$ oder $c + \frac{kc}{100} - a$ d. i. $\frac{100c + kc}{100} - a$ oder $\frac{100 + k}{100} c - a$, d. h. der Capitalist hat noch eben so viel, als wenn er den jährlichen Zins von c zum Capital geschlagen, oder ausgeliehen, aber vom Capital c die Summe a aufgekündet und in Empfang genommen hätte. Z. B. Das Capital c sey 10000 fl. zu 5 Procent ausgeliehen, so ist der Zins am Ende des ersten Jahres 500 fl. Gesetzt nun, der Capitalist brauche jährlich 800 fl. $= a$, die er am Ende eines jeden Jahres beziehet, so empfängt er die 500 fl. Zins und muß überdieß vom Capital noch 300 fl. $= x$ wegnehmen, so daß $500 + 300 = 800$ oder $\frac{kc}{100} + x = a$

ist.

ist. Also hat er am Anfang des zweiten Jahres noch 10000 — 300 oder 9700 fl., d. i. eben so viel als 10000 — 800 + 500 oder 10500 — 800 = $\frac{1000+k}{100}c - a$, d. h. er hat eben so viel, als wenn er 500 fl. jährlichen Zins ausleihet oder zum Capital schlägt, und 800 fl. vom Capital wegnimmt. Nun stellt $\frac{100+k}{100}$ den Werth vor, auf welchen ein Capital = 1 steigt, wenn der jährliche Zins dazu geschlagen wird, denn es verhält sich $100 : 100+k = 1 : \frac{100+k}{100}$. Wenn man diesen Werth des Capitals 1 der Bequemlichkeit der Rechnung wegen mit r bezeichnet, so kann man schliesen $1 : r = c : rc$, oder das Capital 1 beläuft sich nach einem Jahr mit dem dazu gerechneten Zins auf r, also beläuft sich das Capital c nach einem Jahr mit dem dazu gerechneten Zins auf rc, d. h. rc ist $= \frac{100+k}{100}c$, folglich ist $\frac{100+k}{100}c - a$ eben so viel als $rc - a$. Wird nun $rc - a$, oder der Werth des Capitals c nach einem Jahr mit dem dazu gerechneten Zins und weggenommener Summe a als ein neues Capital = D betrachtet, so ist aus dem nemlichen Grund, wie vorhin, der Werth von D nach einem Jahr mit dem dazu gerechneten Zins und weggenommener Summe $a = rD - a$, nemlich $1 : r = D : rD$ und davon a weggenommen, giebt $rD - a$. Substituirt

man

man hierauf statt D den ihm gleichen Werth $rc - a$, so ist $r(rc - a) - a$ d. i. $r^2c - ra - a$ der Werth des Capitals c am Ende des zweiten Jahres.

Nun verhält sich wiederum

$$1 : r = (r^2c - ra - a) : r^3c - r^2a - ra$$

und davon a weggenommen, giebt den Werth des Capitals c am Ende des dritten Jahres =

$$r^3c - r^2a - ra - a.$$

Hieraus folgt der Werth des Capitals c nach weggenommenen a am Ende des vierten Jahres

$$r^4c - r^3a - r^2a - ra - a$$

Am Ende des fünften Jahres

$$r^5c - r^4a - r^3a - r^2a - ra - a$$

u. s. f.

Also am Ende des nten Jahres nach weggenommenen a =

$$r^nc - r^{n-1}a - r^{n-2}a - r^{n-3}a \ldots - r^2a - ra - a$$

Da nun der Rest = q seyn soll, so hat man die Gleichung

$$r^nc - r^{n-1}a - r^{n-2}a - r^{n-3}a \ldots - r^2a - ra - a = q$$

Die Auflösung dieser Gleichung ist im fünften Abschnitt §. 6, Seite 130 gezeigt werden, nur setze man statt dem dortigen x den Buchstaben n, und statt m den Buchstaben r, so ist die daselbst Seite 131 leitete Formel mit der neuen Bezeichnung

$$\frac{a - q(r-1)}{a - c(r-1)} = r^n$$

Folglich, wenn man die logarithmische Rechnung anwendet, wie gleichfalls Seite 131 gezeigt wurde, so ist

$$\frac{\log.[a - q(r-1)] - \log.[a - c(r-1)]}{\log. r} = n$$

Wenn man in dieser Formel statt r den ihm gleichen Werth $\frac{100+k}{100}$ setzt, so ist $r - 1 = \frac{100+k}{100} - 1$ oder $= \frac{100+k-100}{100}$, d. i. $= \frac{k}{100}$, also

$$\frac{\log.\left[a - \frac{qk}{100}\right] - \log.\left[a - \frac{ck}{100}\right]}{\log. \frac{100+k}{100}} = n$$

oder $$\frac{\log. \frac{100a - qk}{100} - \log. \frac{100a - ck}{100}}{\log.(100+k) - \log. 100} = n$$

also

$$\frac{\log.(100a - qk) - \log.100 - \log.(100a - ck) + \log.100}{\log.(100+k) - \log. 100} = n$$

folglich $$\frac{\log.(100a - qk) - \log.(100a - ck)}{\log.(100+k) - \log. 100} = n$$

Z. B. Jemand hat ein Capital von 25000 fl. zu 5 Procent ausstehen. Aber er kann mit den Zinsen

seinen

seinen Aufwand nicht bestreiten, weil er jährlich 2000 fl. braucht. Es findet sich nun nach einigen Jahren, daß von dem Capital noch die Hälfte übrig ist. Wie viele Jahre wurde es auf diese Art benützt?

Hier ist $c = 25000$, $a = 2000$, $k = 5$ und $q = 12500$, also $qk = 62500$, $ck = 125000$, $100a - qk = 200000 - 62500$, oder $= 137500$, $100a - ck = 200000 - 125000$ oder $= 75000$.

Folglich $$\frac{\log. 137500 - \log. 75000}{\log. 105 - \log. 100} = n$$

Es ist aber log. 137500 = 5,1383027
log. 75000 = 4,8750613

Rest 0,2632414

und log. 105 — log. 100 = 0,0211893

Also 0,0211893|0,2632414|12,423
513484
896980
494080
702940

Folglich ist noch die Hälfte des Capitals übrig zwischen dem Ende des 12ten und 13ten Jahres. Der Bruch 0,423 oder 0,423.365 d. i. 154 Tage findet sich auf diese Art nicht ganz richtig. Um ihn genau zu bestimmen, muß man so verfahren.

Was am Ende des 12ten Jahres vom Capital übrig ist, sey = R, und y = der gesuchten Anzahl Tage, die zu den 12 Jahren hinzukommen.

Man schliese Tage Tage

$$365 : y = a : \frac{ay}{365}$$

Nemlich wenn der Capitalist in 365 Tagen a braucht; so braucht er in y Tagen $\frac{ay}{365}$. Ferner $100 : k = R : \frac{kR}{100}$ dem jährl. Zins von R

$365 : y = \frac{kR}{100} : \frac{ykR}{36500}$ dem Zins von R für y Tage.

Also ist $R + \frac{ykR}{36500}$ = dem Rest R nebst dem dazu gerechneten Zins für die y Tage.

Davon aber geht ab, was der Capitalist in y Tagen braucht, nemlich $\frac{ay}{365}$, was übrig bleibt, ist dem gegebenen Rest q gleich. Also ist

$$R + \frac{ykR}{36500} - \frac{ay}{365} = q$$

Folglich $R - q = \frac{ay}{365} - \frac{ykR}{36500}$

oder $R - q = \frac{100ay - ykR}{36500}$

also $36500\,(R - q) = (100a - kR)\,y$

daher $\frac{36500\,(R-q)}{100a - kR} = y$

Es kommt hier zuerst darauf an, R zu finden, wenn n eine ganze Zahl ist. Dieses wird in der dritten Aufgabe gezeigt werden. Die Formel mag einstweilen hier vorausgesetzt werden, sie ist:

$$\frac{100a - \left(\frac{100+k}{100}\right)^n [100a - ck]}{k} = R$$

Nemlich in diesem Fall ist $k = 5$, $n = 12$, $c = 25000$ und $a = 2000$

also $\left(\frac{100+k}{100}\right)^n = \left(\frac{105}{100}\right)^{12}$. Dieser Ausdruck wird am leichtesten logarithmisch berechnet. Es ist nemlich $\log. \frac{105}{100}$ $\log. 105 - \log. 100 = 0{,}0211893$ und $\log. \left(\frac{105}{100}\right)^{12} = 12 . 0{,}0211893 = 0{,}2542716$, die dazu gehörige Zahl, oder $\left(\frac{105}{100}\right)^{12}$ ist $=$ $1{,}795856$. Ferner ist $ck = 125000$ und $100a = 200000$, also $100a - ck = 75000$, folglich

$\left(\frac{100+k}{100}\right)^n (100a - ck) = 1{,}795856 . 75000$ $= 134689{,}2$ und dieses abgezogen von $100a$, oder von 200000 giebt $= 65310{,}8$ dieses dividiret mit $k = 5$ giebt $R = 13062{,}16$.

Nun kann y berechnet werden, denn da

$$y = \frac{36500 (R - q)}{100a - kR}$$

aber $q = 12500$ ist, so ist $R - q = 13062{,}16 - 12500$ oder $= 562{,}16$.

Dieses multiplicirt mit 36500 giebt $36500 (R - q) = 20518840$.

Ferner ist $kR = 5 . 13062{,}16 = 65310{,}8$ also $100a - kR = 200000 - 65310{,}8 = 134689{,}2$ und

wenn man mit dieser Zahl in 20518840 dividirt, so ist y = 152 Tagen. Dieses ist von den vorhin gefundenen 154 Tagen um 2 Tage verschieden. Indessen, da der Unterschied meistens nicht beträchtlich ist, so kann man, um die Weitläuftigkeit der Rechnung zu vermeiden, mit dem nach der vorigen Art gefundenen Resultate sich begnügen.

Aehnliche Exempel zur Uibung.

1) Jemand hatte ein Capital von 36000 fl. zu $5\frac{1}{2}$ Procent ausstehen: Er brauchte aber jährlich 2600 fl. zur Bestreitung seines Aufwandes, und kündigte also in jedem Jahre so viel von dem Capital auf, daß wenn er die aufgekündete Summe am Ende des Jahres erhielt, diese nebst dem eingenommenen Zins jedesmal 2600 fl. betrug. Nun ist jetzt noch der vierte Theil des Capitals übrig. Wie viele Jahre wurde es auf diese Art benützt? Antw. Etwas über 23 Jahre lang, oder beinahe 23,6 Jahre.

2) Von einem Capital, das 8000 fl. betrug, und zu 5 Procent ausgeliehen ist, sind jetzt noch 400 fl. übrig, weil am Ende eines jeden Jahres eine Summe weggenommen wurde, welche mit dem jedesmaligen Zins auf 600 fl. sich belief. Wie viele Jahre wird es schon auf diese Art benützt? Antw. Etwas über 21 Jahre, oder beinahe 21,8 Jahre.

Erste Anmerkung.

Wenn die am Ende eines jeden Jahres wegzunehmende Summe a kleiner ist als der jährliche Zins $\frac{ck}{100}$ des Capitals c, so wird, wenn a von diesem Zins weggenommen wird, etwas übrig bleiben, das weggeliehen, und die Zinsen davon zum Capital geschlagen werden können. Dadurch wird also das Capital c in jedem Jahr größer, oder q ist größer als c. In diesem Fall darf, wenn man n sucht, die Formel (Seite 176) nur so verändert werden:

$$\frac{\log.\ (qk - 100a) - \log.\ (ck - 100a)}{\log.\ (100 + k) - \log.\ 100} = n$$

Denn in der Formel (Seite 176) ist $\log.\ (100a - qk) - \log.\ (100a - ck)$ eben so viel als $\log.\ \frac{100a - qk}{100a - ck}$, aber $\frac{100a - qk}{100a - ck}$ ist $= \frac{qk - 100a}{ck - 100a}$, also ist auch $\log.\ \frac{100a - qk}{100a - ck} = \log.\ \frac{qk - 100a}{ck - 100a}$, oder $= \log.\ (qk - 100a) - \log.\ (ck - 100a)$.

Wenn die Summe a nicht am Ende eines jeden Jahres, sondern am Anfang desselben weggenommen wird, so wird vom Capital c sogleich bei dem Anfange des ersten Jahres a weggerechnet, und folglich c — a als anfängliches Capital angesehen. Es sey nun $c - a = C$, so wird in der Formel der ersten Aufgabe und dieser Anmerkung C statt c gesetzt.

Zweite Anmerkung.

Wenn das Capital c, welches zu k Procent ausgeliehen ist, nicht um etwas vermindert, sondern im Gegentheil mit Ende eines jeden Jahres um die Summe a vermehret wird, so ist, wenn $\frac{100+k}{100} = r$ gesetzt wird, c mit dem dazu gerechneten Zins nach einem Jahr $= rc$, dazu a addirt, giebt $rc+a$. Dieser Werth beläuft sich am Ende des folgenden Jahres mit dem dazu gerechneten Zins auf r^2c+ra, nemlich es verhält sich $1 : r = rc+a : r^2c+ra$, denn das Capital 1 beläuft sich nach einem Jahr auf r, also $rc+a$ auf r^2c+ra, und dazu a addirt, giebt $r^2c+ra, +a$. Also ist der Werth des Capitals c am Ende des dritten Jahres r^3c+r^2a+ra und dazu a addirt, giebt $r^3c+r^2a+ra+a$. Folglich ist am Ende des nten Jahres mit dem dazu gerechneten a der Werth von $c = r^nc+r^{n-1}a+r^{n-2}a \ldots + ra + a$. Es sey nun dieser Werth $= t$, so ist

$$r^nc+r^{n-1}a+r^{n-2}a \ldots + ra + a = t$$

oder $r^nc + a[r^{n-1}+r^{n-2} \ldots r+1] = t$

oder $r^nc + a[1+r+r^2 \ldots + r^{n-2}+r^{n-1}] = t$

Wenn man nun diese Gleichung mit der im fünften Abschnitt, §. 6. Seite 130 angegebenen

$$m^xc - a[1+m+m^2 \ldots + m^{x-2}+m^{x-1}] = q$$

zusammenhält, und in dieser letztern r statt m, n statt x

und

und t statt q setzt, so sieht man, daß sich die erstere von dieser blos dadurch unterscheidet, daß sie nach dem ersten Glied + die letztere aber das − Zeichen hat. Sie kann also leicht nach der (Seite 130) angegebenen Art aufgelöset werden, dann ist

$$\frac{a + t(r-1)}{a + c(r-1)} = 1^n$$

Da nun $r = \frac{100+k}{100}$, so ist

$$r - 1 = \frac{100+k}{100} - 1 = \frac{100+k-100}{100} = \frac{k}{100}$$

Substituirt man diesen Werth in der Formel statt $r-1$, so ist

$$\frac{a + \frac{tk}{100}}{a + \frac{ck}{100}} = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n$$

also $\frac{100a+tk}{100a+ck} = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n$

folglich $\log.(100a+tk) - \log.(100a+ck) =$
$n\,[\log.(100+k) - \log. 100]$

daher $\frac{\log.(100a+tk) - \log.(100a+ck)}{\log.(100+k) - \log. 100} = n$

Z. B. Ein Capitalist hat ein Capital von 12500 fl. ausstehen zu 5 Procent. Weil er nun andere beträchtliche Einkünfte hat, so bestimmt er dieses Capital für seinen Sohn, und sucht es so bald als möglich auf den Werth von 50000 fl. zu brin-

gen. Er schlägt also nicht nur die jährlichen Zinsen zu dem Capital, sondern legt auch am Ende eines jeden Jahres 1200 fl. zu, die gleichfalls zu 5 Procent verzinset, und die Zinsen zu dem Capital geschlagen werden. Nach wie viel Jahren wird er seine Absicht erreichen?

Hier ist $c = 12500$ fl., $k = 5$, $a = 1200$ u. $t = 50000$.
Also ist $100a = 120000$, $tk = 250000$ u. $ck = 62500$.
Ferner ist $100a + tk = 370000$ u. $100a + ck = 182500$.

Es ist aber log. 370000 = 5,5682017
log. 182500 = 5,2612629

$$
\begin{array}{r|r|l}
0,0211893 & 0,3069388 & 14,4 \\
 & 211893 & \\
\hline
 & 950458 & \\
 & 847572 & \\
\hline
 & 1028860 &
\end{array}
$$

Also beinahe nach 14,4 Jahren.

Dritte Anmerkung.

Wenn die Summe, welche am Ende eines jeden Jahres zu dem Capital gelegt wird, dem Capital selbst gleich ist, so ist $a = c$, daher darf man in der vorigen Formel nur c statt a setzen, so ist

$$\frac{\log.(100c + tk) - \log.[(100+k)c]}{\log.(100+k) - \log.100} = n.$$

Vier-

Vierte Anmerkung.

Wenn die Summe a am Ende eines jeden Jahres zu dem Capital c gelegt wird, nur am Ende des letzten oder nten Jahres nicht, so daß also die Summe a, welche am Ende des vorletzten Jahres, oder des (n—1)ten Jahres zum Capital gelegt wird, die letzte ist, so muß man bei der in der zweiten Anmerkung angegebenen Formel

$$\frac{100a + tk}{100a + ck} = \left(\frac{100 + k}{100}\right)^n$$

zuerst t entwickeln. Es ist nemlich

$$t = \frac{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n (100a + ck) - 100a}{k}$$

Nun ist t der Werth des Capitals c am Ende des nten Jahres, wenn a auch am Ende des nten Jahres zum Capital gelegt wird. Es sey aber w der Werth dieses Capitals c am Ende des nten Jahres, wenn a am Ende des nten Jahres nicht zugelegt worden ist, so ist w um a kleiner als t, oder es ist t—a=w. Also ist

$$w = \frac{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n (100a + ck) - 100a}{k} - a$$

folglich ist $\frac{(w+a)k + 100a}{100a + ck} = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n$

Dar-

Daraus folgt, wenn man die Logarithmen gebraucht:

$$\log.[100a + (w + a)k] - \log.(100a + ck) = n[\log.(100 + k) - \log.100]$$

und

$$\frac{\log.[100a + (w + a)k] - \log.(100a + ck)}{\log.(100 + k) - \log.100} = n$$

Fünfte Anmerkung.

Wenn die Summe a, welche am Ende eines jeden Jahres zu dem Capital gelegt wird, und zwar so, daß die am Ende des n—1ten Jahres zugelegte die letzte ist, dem Capital c gleich ist, so setze man in der Formel der vierten Anmerkung c statt a. Alsdann erhält man:

$$\frac{\log.[100c + (w + c)k] - \log.(100c + ck)}{\log.(100 + k) - \log.100} = n$$

oder

$$\frac{\log.[(100 + k)c + wk] - \log.[(100 + k)c]}{\log.(100 + k) - \log.100} = n$$

Z. B. Ein Kaufmann sollte mehrere Jahre nach einander und zwar mit Anfang eines jeden Jahres 4000 fl. bezahlen, er bezahlte aber an keinem Termin etwas, so daß also die Summe, mit den zusammengesetzten Zinsen zu 4 Procent am Ende des letzten Jahres auf 27593 fl. sich belief. Wie viele jährliche Termine ist der Kaufmann schuldig geblieben?

Wenn

Wenn man die ersten 4000 fl., welche der Kaufmann am Anfang des ersten Jahres bezahlen sollte, als ein Capital $= c$ betrachtet, und man setzt, der Gläubiger habe es zur gehörigen Zeit erhalten, so hätte er es n Jahre benützen können. Hätte der Gläubiger am Ende des ersten, oder welches einerlei ist, am Anfang des zweiten Jahres wiederum 4000 fl. $= c$ bekommen, so hätte er diese Summe zu dem vorigen Capital c schlagen und $n-1$ Jahre benützen können u. s. f. kurz, es wäre das Capital c mit der am Ende eines jeden Jahres entrichteten Summe, die auch $= c$ ist vermehrt worden, und die am Ende des $n-1$ten Jahres entrichtete und zu dem Capital zugelegte Summe c, wäre die letzte gewesen. Da nun die Anzahl Jahre $= n$, während welcher der Kaufmann nichts bezahlt hat, gesucht wird, so wird sie nach der in dieser Anmerkung angegebenen Formel gefunden.

Es ist nemlich $c = 4000$, $w = 27593$, $k = 4$. Also $100 + k = 104$, $(100 + k)c = 104.4000 = 416000$, $wk = 27593.4 = 110372$ und $(100 + k)c + wk = 416000 + 110372 = 526372$. Nun ist.

$$\begin{array}{r} \log.\ 526372 = 5{,}7212910 \\ \log.\ 416000 = 5{,}6190933 \\ \hline 0{,}1021977 \end{array}$$

$\log. 104 - \log. 100 = 0{,}0170333$

Wenn

Wenn man mit 0,0170333 in 0,1021977 dividirt, so ist der Quotient sehr nahe = 6. Folglich blieb der Schuldner 6 Jahre lang mit der Zahlung zurück.

Aehnliches Exempel zur Uibung.

Jemand hat nach einer gewissen Anzahl Jahre 10000 fl. zu fordern, er will aber solche in jährlichen Terminen erheben, so daß mit Anfang eines jeden Jahres 323 fl. bezahlt werden, und die Schuld am Ende des Zeitraums, da er das Capital zu fordern hat, getilgt sey. Wie viele solche jährliche Termingelder sind zu bezahlen, wenn zusammengesetzte Zinsen zu 4 Procent gerechnet werden? (Hier ist $c = 323$, $w = 10000$, $k = 4$.) Antw. 19, 9 oder sehr nahe 20 Termingelder.

Zweite Aufgabe.

Jemand hat ein Capital c zu k jährlichen Procent auf Zinsen ausgeliehen, er braucht jährlich die Summe a, die größer ist als der jährliche Zins des Capitals c, und nimmt also am Ende eines jeden Jahres von dem Capital so viel weg, daß dieses, nebst den dieses Jahr gefallenen Zinsen des Capitals, die Summe a beträgt, nach wie viel Jahren ist das Capital aufgezehrt.

Man nehme die in der ersten Aufgabe angegebene Formel

log.

$$\frac{\log.(100a - qk) - \log.(100a - ck)}{\log.(100 + k) - \log.100} = n$$

und weil der Rest q verschwindet, wenn das Capital c nach n Jahren aufgezehrt ist, so setze man in ihr q = o. Alsdann ist auch qk = o, folglich

$$\frac{\log.100a - \log.(100a - ck)}{\log.(100 + k) - \log.100} = n$$

Z. B. Jemand hat ein Capital von 45000 fl. zu 5 Procent ausstehen, er kann aber mit den Zinsen dieses Capitals seinen Aufwand nicht bestreiten, denn er braucht jährlich 4000 fl., und muß also am Ende eines jeden Jahres vom Capital so viel wegnehmen, daß diese Summe nebst den Zinsen dieses Jahres 4000 fl. beträgt. Nach wie viel Jahren wird er sein Capital aufgezehrt haben?

Hier ist c = 45000, a = 4000 und k = 5, also 100a = 400000, ck = 225000 u. 100a - ck = 175000, ferner log. 105 - log. 100 = 0,0211893

log. 400000 = 5,6020600
log. 175000 = 5,2430380

0,0211893|0,3590220|16,943
1471290
1999320
922830
752580

Also ist nach 16,943 Jahren das Capital aufgezehrt, oder nach 16 Jahren 344 Tagen.

Es

Es ist auch hier zu bemerken, wie schon bei der ersten Aufgabe erinnert wurde, daß der Bruch 0,943 nicht ganz richtig ist.

Will man sich die Mühe geben, ihn genauer zu finden, so muß man wie bei der ersten Aufgabe verfahren. Es muß nemlich erstens der Rest R des Capitals c am Ende des 16ten Jahres gesucht werden, vermittelst der in der ersten Aufgabe angegebenen Formel:

$$\frac{100a - \left(\frac{100+k}{100}\right)^n [100a - ck]}{k} = R$$

Sodann zweitens die Anzahl Tage y vermittelst der gleichfalls in der ersten Aufgabe hergeleiteten Formel

$$\frac{36500\,(R - q)}{100a - kR} = y$$

Da aber im gegenwärtigen Fall q = Null ist, so ist

$$\frac{36500\,R}{100a - kR} = y$$

In unserm Beispiel ist a = 4000, c = 45000, k = 5, n = 16, also 100a = 400000, ck = 225000, und 100a — ck = 175000, folglich

$$\frac{400000 - \left(\frac{105}{100}\right)^{16} \cdot 175000}{5} = R$$

oder

oder $80000 - \left(\frac{105}{100}\right)^{16} \cdot 35000 = R$

Es ist aber $\log. \left(\frac{105}{100}\right)^{16} = 16[\log. 105 - \log. 100] =$ $16 . 0{,}0211893 = 0{,}3390288$ und die dazu gehörige Zahl, oder $\left(\frac{105}{100}\right)^{16}$ ist $= 2{,}182874$ und

$$\left(\frac{105}{100}\right)^{16} \cdot 35000 = 76400{,}59.$$

Dieses von 80000 subtrahirt, so ist $R = 3599{,}41$ und $kR = 17997{,}05$.

Folglich ist $$\frac{36500 \cdot 3599{,}41}{400000 - 17997{,}05} = y$$

oder $$\frac{131378465}{382002{,}95} = y$$

Wenn man wirklich dividiret, so ist $343 = y$.

Hier trift y mit der vorhin gefundenen Anzahl Tage fast ganz überein. Ist aber das Capital c und die Anzahl der Jahre n größer als in diesem Beispiel, so findet sich in der Anzahl der Tage ein größerer Unterschied, der aber doch zu unbeträchtlich ist, als daß man bei der Anwendung der obigen Formel auf die bürgerlichen Geschäfte die zuletzt gezeigte Verbesserung anzubringen braucht.

Aehnliche Exempel zur Uibung.

1) Jemand hat ein Capital von 78000 fl. zu 5 Procent ausgeliehen, und braucht am Ende eines

jeden

jeden Jahrs 4500 fl., er muß also jährlich vom Capital so viel wegnehmen, daß diese Summe mit den Zinsen des Jahres 4500 fl. beträgt. Nach wie viel Jahren ist das Capital aufgezehrt? Antwort. Nach 41,297 Jahren, oder nach 41 Jahren 108 Tagen. Wenn man die Verbesserung anbringt, so findet man 41 Jahre 106 Tage.

2) Eine Schuld von 1200 fl., welche sogleich zu bezahlen ist, wird von dem Schuldner in jährlichen Terminen abgetragen, und zwar so, daß er am Ende eines jeden Jahres 200 fl. bezahlt, nach wie viel Jahren ist die Schuld bezahlt, wenn 4 Procent jährlicher Zins gerechnet wird? (Es ist leicht einzusehen, daß dieses Exempel hieher gehört. Nemlich der Schuldner zahlt am Ende des ersten Jahres 48 fl. als den jährlichen Zins des Capitals von 1200 fl. und dazu noch 152 fl., so hat er in allem 200 fl. bezahlt. Nun ist bei dem Anfang des zweiten Jahres vom Capital noch vorhanden 1200 − 152 fl. oder 1048 fl., davon bezahlt der Schuldner am Ende des zweiten Jahres den jährlichen Zins mit $41\frac{92}{100}$ fl. und dazu noch $158\frac{8}{100}$ fl., also in allem wieder 200 fl. u. s. f. Auf diese Art nimmt nach und nach das Capital ab. Man kann also den Schuldner als einen Capitalisten betrachten, der jährlich 200 fl. braucht, und folglich von dem Capital, das 1200 fl. beträgt, am Ende eines jeden Jahres so viel weg-

nimmt,

nimmt, daß es mit dem jährlichen Zins zusammen 200 fl. ausmacht, und zu bestimmen suchen, nach wie viel Jahren das Capital aufgezehrt ist.) Antwort. Nach 6,997 Jahren, oder fast nach 7 Jahren.

Erste Anmerkung.

Wenn die Summe a nicht am Ende des ersten Jahres, sondern sogleich bei dessen Anfang zum erstenmal weggenommen wird, sodann zum zweitenmal bei dem Ende des ersten Jahres, oder bei dem Anfang des zweiten u. s. f. und zum letztenmal bei dem Ende des nten Jahres oder bei dem Anfang des $n+1$ten Jahres, so wird von dem Capital c bei dem Anfang des ersten Jahres a abgerechnet, folglich $c-a$ als anfängliches Capital angesehen. Es sey nun $c-a=C$, so wird in der Formel der zweiten Aufgabe C statt c gesetzt, wenn man die Anzahl n der Jahre finden will, da das Capital c aufgezehret ist.

Zweite Anmerkung.

Wenn die Summe a, wie in der ersten Anmerkung, am Anfang eines jeden Jahres, nemlich des ersten, zweiten, u. s. f. aber zum letztenmal, nicht bei dem Anfang des $n+1$ten Jahres, sondern bei dem Anfang des nten Jahres, oder zu Ende des $n-1$ten Jahres, weggenommen wird,

und es ist das anfängliche Capital = c, so muß von dem Capitall c sogleich mit Anfang des ersten Jahres die Summa a abgerechnet, und c — á als anfängliches Capital = C betrachtet werden. Hierauf nehme man an, am Ende des ersten, zweiten, dritten, und endlich des n — 1ten Jahres, werde jedesmal die Summe a weggenommen. Nun gehört die Formel

$$\frac{\log.(100a - qk) - \log.(100a - ck)}{\log.(100 + k) - \log.100} = n$$

in der ersten Aufgabe für den Fall, da bei dem anfänglichen Capital c am Ende eines jeden, auch des nten Jahres die Summe a weggenommen wird, allein jetzt wird bei dem anfänglichen Capital C die Summe a zwar auch am Ende eines jeden Jahres, aber zum letztenmal am Ende des n — 1ten Jahres weggenommen, folglich ist hier n — 1 diejenige Anzahl Jahre, nach Verlauf welcher, wenn a am Ende des n — 1ten Jahres zum letztenmal weggenommen wurde, bei dem Procent k der Rest q bleibt. Also ist

$$\frac{\log.(100a - qk) - \log.(100a - Ck)}{\log.(100 + k) - \log.100} = n - 1$$

und daher

$$\frac{\log.(100a - qk) - \log.(100a - Ck)}{\log.(100 + k) - \log.100} + 1 = n.$$

Ist

Ist q = o, oder das Capital C, d. i. c — a am Anfang des nten oder am Ende des n — 1ten Jahres, nachdem noch a weggenommen worden, aufgezehrt, so ist auch qk = o, also

$$\frac{\log. 100a - \log. (100a - Ck)}{\log. (100 + k) - \log. 100} + 1 = n.$$

Nemlich das Capital hat am Ende des n — 1ten Jahres bis auf die Größe a abgenommen, wird nun die Größe a weggenommen, so ist von dem ausstehenden Capital schon am Ende des n — 1ten Jahres nichts mehr übrig, oder q ist = o, aber mit dem weggenommenen a reicht man noch ein Jahr aus, folglich ist erst am Ende des nten Jahres alles aufgezehret, und dieses n findet man vermittelst der letztern Formel.

Zahlenbeispiel.

Jemand will mit einem Capital von 10400 fl., das zu 4 Procent ausgeliehen ist, eine gewisse Anzahl Jahre auskommen, er braucht aber jährlich 1233 fl., nach wie viel Jahren ist alles aufgezehrt? Hier ist c = 10400 fl., und a = 1233 fl., da der Capitalist für das erste Jahr 1233 fl. braucht, so nimmt er solche gleich mit dem Anfang des ersten Jahres von dem Capital weg, also ist C, oder c — a = 9167 fl. Ferner ist k = 4, folglich Ck = 9167.4 = 36668, 100 + k = 104 und 100a = 123300.

Setzt man diese Zahlen statt der entsprechenden Buchstabenwerthe in der obigen Formel ein, so ist

$$\frac{\log.\ 123300 - \log.(123300 - 36668)}{\log.\ 104 - \log.\ 100} + 1 = n$$

oder $$\frac{\log.\ 123300 - \log.\ 86632}{\log.\ 104 - \log.\ 100} + 1 = n$$

d. i. $$\frac{5{,}0909631 - 4{,}9376783}{0{,}0170333} + 1 = n$$

d. i. $$\frac{0{,}1532848}{0{,}0170333} + 1 = n.$$ Es ist aber

$$\frac{0{,}1532848}{0{,}0170333}$$

so nahe an 9, daß man diesen Quotienten $= 9$ annehmen darf, folglich ist $9 + 1$ oder $10 = n$. Es ist also bei dem Ende des 9ten Jahres nur noch 1233 fl. übrig, und wenn diese weggenommen, und während des 10ten Jahres verbraucht werden, so ist am Ende des 10ten Jahres alles rein aufgezehret.

Dritte Aufgabe.

Jemand hat ein Capital c zu k jährlichen Procent auf Zinsen ausstehen, er braucht jährlich die Summe a, welche er am Ende eines jeden Jahres wegnimmt, wie groß ist nach n Jahren das Capital?

Es sey die Größe des Capitals nach n Jahren $= q$, so finden zwei Fälle statt.

Erster

Erster Fall. Wenn die Summe a, welche am Ende eines jeden Jahres weggenommen wird, größer ist als der jährliche Zins des Capitals c, so wird der Rest q kleiner seyn als c, und kann auf folgende Art gefunden werden.

Nach der ersten Aufgabe ist

$$\frac{\log.(100a-qk)-\log.(100a-ck)}{\log.(100+k)-\log.100}=n$$

Daraus folgt $\log.(100a-qk)-\log.(100a-ck)=$

$$n[\log.(100+k)-\log.100]$$

oder $\log.\frac{100a-qk}{100a-ck}=n\log.\frac{100+k}{100}$

also $\frac{100a-qk}{100a-ck}=\left(\frac{100+k}{100}\right)^n$

und $100a-qk=\left(\frac{100+k}{100}\right)^n(100a-ck)$

Folglich $100a-\left(\frac{100+k}{100}\right)^n(100a-ck)=qk$

und $$\frac{100a-\left(\frac{100+k}{100}\right)^n(100a-ck)}{k}=q$$

Z. B. Von einem Capital von 12000 fl., das zu 5 Procent aussteht, werden am Ende eines jeden Jahres 800 fl. weggenommen, wie groß wird der Rest am Ende des 14ten Jahres seyn?

Hier ist $c=12000$, $a=800$, $k=5$ u. $n=14$, also $100a=80000$, $ck=60000$, und $100a-ck=20000$. Folglich

$$\frac{80000 - \left(\frac{105}{100}\right)^{14} . 20000}{5} = q$$

$$\text{oder } 16000 - \left(\frac{105}{100}\right)^{14} . 4000 = q$$

Nun wird der Ausdruck $\left(\frac{105}{100}\right)^{14}$ logarithmisch berechnet.

Es ist neml. $\log. \left(\frac{105}{100}\right)^{14} = 14(\log. 105 - \log. 100)$

Ferner ist $\log. 105 - \log. 100 = 0{,}0211893$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \hline 847572 \\ 211893 \\ \hline \end{array}$$

$$\log. \left(\frac{105}{100}\right)^{14} = 0{,}2966502$$

Also $\left(\frac{105}{100}\right)^{14}$ als die zu diesem Logarithmus gehöriger Zahl $= 1{,}979931$

also ist $16000 - 1{,}979931 . 4000 = q$

oder $16000 - 7919{,}724 = q$

d. i. $8080{,}276 = q$

Es ist also von dem Capital 12000 fl. nach 14 Jahren noch 8080,276 fl. übrig.

Aehnliches Exempel zur Uibung.

Eine Schuld von 17400 fl. wird mit 6 Procent jährlich verzinset, so daß der jährliche Zins des Capitals 1044 fl. beträgt. Nun zahlt aber der Schuldner am Ende eines jeden Jahres seinem Gläubiger

biger eine gleiche Summe, nemlich so viel, daß es mit dem jährlichen Zins zusammen allemal 3000 fl. beträgt, wodurch also die Schuld selbst nach und nach abgetragen wird. Wie viel bleibt der Schuldner am Ende des siebenten Jahres noch im Rest? Antw. 981,6294 fl. oder 981 fl. 37 Kr.

Zweiter Fall. Wenn die Summe a, welche am Ende eines jeden Jahres weggenommen wird, kleiner ist, als der jährliche Zins des Capitals c, so wird q größer seyn als c, und kann auf folgende Art gefunden werden.

In der ersten Anmerkung der ersten Aufgabe ist

$$\frac{\log.(qk-100a)-\log.(ck-100a)}{\log.(100+k)-\log.100}=n$$

also $\log.\frac{qk-100a}{ck-100a}=n\log.\frac{100+k}{100}$

folglich $\frac{qk-100a}{ck-100a}=\left(\frac{100+k}{100}\right)^n$

daher $q=\frac{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n(ck-100a)+100a}{k}$

Z. B. Jemand hat ein Capital von 4500 fl. zu $5\frac{1}{2}$ Procent ausstehen, er behält von den Zinsen des Capitals am Ende eines jeden Jahres 100 fl., das übrige schlägt er zu dem Capital, oder leihet es gleichfalls zu $5\frac{1}{2}$ Procent aus, wie hoch ist das Capital nach 20 Jahren angewachsen?

Hier ist $c = 4500$, $a = 100$, $k = 5\frac{1}{2}$ u. $n = 20$.
Also $100a = 10000$, $ck = 24750$ u. $ck - 100a = 14750$.

Folglich $$q = \frac{\left(\frac{105\frac{1}{2}}{100}\right)^{20} \cdot 14750 + 10000}{5\frac{1}{2}}$$

oder $$q = \frac{\left(\frac{105\frac{1}{2}}{100}\right)^{20} \cdot 29500 + 20000}{11}$$

Der Ausdruck $\left(\frac{105\frac{1}{2}}{100}\right)^{20}$ wird logarithmisch berechnet. Es ist nemlich

$\log. \left(\frac{105\frac{1}{2}}{100}\right)^{20} = 20\,(\log. 105\frac{1}{2} - \log. 100)$. Ferner ist $\log. 105\frac{1}{2} = \log. 105{,}5 = 2{,}0232525$ und $\log. 105\frac{1}{2} - \log. 100 = 0{,}0232525$.

$$\log. \left(\frac{105\frac{1}{2}}{100}\right)^{20} = \frac{0{,}0232525}{\frac{20}{0{,}4650500}}$$

Nun ist die zu diesem Logarithmus gehörige Zahl, oder $\left(\frac{105\frac{1}{2}}{100}\right)^{20} = 2{,}917762$

also $$q = \frac{2{,}917762 \cdot 29500 + 20000}{11}$$

oder $$q = \frac{86073{,}979 + 20000}{11}$$

d. i. $q = \frac{106073{,}979}{11}$ folglich $q = 9643{,}089$ fl.

Erste

Erste Anmerkung.

Wenn a zu Anfang eines jeden Jahres, und auch bei dem Anfang des $n+1$ten Jahres vom Capital c weggenommen wird, so ist a sogleich von c abzuziehen, und der Rest $c-a=c$ bei der Zahlenberechnung statt c in den Formeln dieser dritten Aufgabe zu substituiren, um q zu finden.

Zweite Anmerkung.

Wenn die Summe a, wie in der ersten Anmerkung, am Anfang eines jeden Jahres, nemlich des ersten, zweiten u. s. w. aber zum letztenmal nicht bei dem Anfang des $n+1$ten Jahres, sondern bei dem Anfang des nten Jahres oder zu Ende des $n-1$ten Jahres weggenommen wird, und es ist das anfängliche Capital $=c$, so muß von dem Capital c sogleich mit Anfang des ersten Jahres die Summe a abgerechnet, und $c-a=C$ als anfängliches Capital betrachtet werden. Hierauf nehme man an, am Ende des ersten, zweiten, dritten, und endlich des $n-1$ten Jahres werde jedesmal die Summe a weggenommen. Wenn nun gefragt wird, wie groß ist das Capital c am Ende des $n-1$ten, oder bei dem Anfang des nten Jahres, nach eben weggenommener Summe a, so nehme man die Formel der zweiten Anmerkung, in der zweiten Aufgabe, Seite 194 nemlich

log.

$$\frac{\log.(100a - qk) - \log.(100a - Ck)}{\log.(100+k) - \log.100} + 1 = n$$

und entwickele aus ihr den Werth q auf folgende Art.

$$\log.(100a - qk) - \log.(100a - Ck) = (n-1)[\log.(100+k) - \log.100]$$

$$\text{also } \log.\frac{100a - qk}{100a - Ck} = (n-1)\log.\frac{100+k}{100}$$

$$\text{folglich } \frac{100a - qk}{100a - Ck} = \left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}$$

$$\text{daher } 100a - qk = \left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}(100a - Ck)$$

$$\text{also } \frac{100a - \left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}(100a - Ck)}{k} = q$$

Z. B. Jemand hat 10400 fl. zu 4 Procent ausstehen, und braucht jährlich 1233 fl., wie viel ist von dem Capital am Ende des 8ten, oder bei dem Anfang des neunten Jahres nach eben zum leztenmal weggenommenen 1233 fl. noch übrig:

Hier ist $c = 10400$, $k = 4$, $a = 1233$ u. $n = 9$. Also c-a od. $C = 9167$, $Ck = 9167 . 4 = 36668$, $100a = 123300$, $100a - Ck = 123300 - 36668$, $= 86632$, ferner $\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1} = \left(\frac{104}{100}\right)^8$. Also ist, wenn man diese Zahlen, statt der entsprechenden Buchstaben in der vorigen Formel substituirt,

$$\frac{123300 - \left(\frac{104}{100}\right)^8 86632}{4} = q$$

Nun

Nun ist zuerst der Ausdruck $\left(\frac{104}{100}\right)^8$ logarithmisch zu entwickeln. Es ist aber log. $\left(\frac{104}{100}\right)^8 =$

$$8(\log. 104 - \log. 100)$$

$$\text{Nun ist } \log. 104 = 2{,}0170333$$
$$\log. 100 = 2$$
$$\log. 104 - \log. 100 = 0{,}0170333$$
$$\text{multipliciret mit } 8$$
$$\log. \left(\frac{104}{100}\right)^8 = 0{,}1362664$$

Nun ist die zu dem Logarithmus 0,1362664 gehörige Zahl, oder $\left(\frac{104}{100}\right)^8 = 1{,}368568$

$$\text{also ist } \frac{123300 - 1{,}368568 \, . \, 86632}{4} = q$$

$$\text{oder } \frac{123300 - 118561{,}78}{4} = q$$

$$\text{folglich } 1184{,}55 = q$$

Vierte Aufgabe.

Jemand hat ein Capital c zu k Procent auf Zinsen ausstehen, er schlägt nicht nur die Zinsen zu dem Capital, sondern legt auch am Ende eines jeden Jahres die Summe a dazu, welche gleichfalls zu k Procent verzinset wird. Wie hoch wächst das Capital nach n Jahren an?

Es sey der Werth des Capitals c am Ende des nten Jahres = t, so wird t auf folgende Art bestimmt.

Man

Man nehme die in der zweiten Anmerkung der ersten Aufgabe hergeleitete Formel

$$\frac{100a+tk}{100a+ck}=\left(\frac{100+k}{100}\right)^n$$

und entwickle aus ihr den Werth von t.

Es ist nemlich $100a+tk=\left(\frac{100+k}{100}\right)^n(100a+ck)$

$$\text{also } t=\frac{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n(100a+ck)-100a}{k}$$

Erste Anmerkung.

Wenn a = c, oder die am Ende eines jeden Jahres zugelegte Summe dem Capital gleich ist, so substituire man in der vorigen Formel c statt a, so findet sich der Werth des Capitals c am Ende des nten Jahres

$$\text{oder } t=\frac{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n(100c+ck)-100c}{k}$$

$$\text{d. i. } t=\frac{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n(100+k)c-100c}{k}$$

$$\text{oder } t=\frac{\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n(100+k)-100\right]c}{k}$$

also

$$\log. t=\log.\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n(100+k)-100\right]+\log.c-\log.k$$

Zwei-

Zweite Anmerkung.

Wenn die Summe a am Ende eines jeden Jahres zu dem Capital c gelegt wird, nur am Ende des letzten oder nten Jahres nicht, und es ist der Werth des Capitals c am Ende des nten Jahres w, so ist (erste Aufgabe, vierte Anmerkung, Seite 185)

$$w = \frac{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n (100a+ck) - 100a}{k} - a$$

Ist ferner a = c, so ist

$$w = \frac{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n (100+k)c - 100c}{k} - c$$

$$\text{oder } w = \frac{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n (100+k)c - (100+k)c}{k}$$

$$\text{d. i. } w = \frac{\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right](100+k)c}{k}$$

Z. B. Ein Kaufmann sollte sechs Jahre nacheinander und zwar mit Anfang eines jeden Jahres 4000 fl. bezahlen, er bezahlte aber nichts. Wie viel ist er am Ende des sechsten Jahres schuldig, wenn die Zinsen zu 4 Procent, und zusammengesetzte Zinsen gerechnet werden?

Der

Der Gläubiger, wenn er richtig bezahlt worden wäre, hätte mit dem Anfang des ersten Jahres 4000 fl. erhalten, am Ende des ersten, oder mit dem Anfang des zweiten Jahres wiederum 4000 fl. und so fort, endlich bei dem Anfang des sechsten Jahres zum letztenmal 4000 fl., diese einzelnen Summen hätte er auf Zinsen ausleihen können, so wie auch die davon eingegangenen Zinsen, welches zusammen am Ende des sechsten Jahres ein gewisses Quantum w betragen haben würde, von welchem der Gläubiger der Besitzer gewesen wäre. Eben dieses Quantum w muß der Gläubiger von seinem Schuldner, der die einzelnen Termingelder nicht bezahlte, am Ende des sechsten Jahres erhalten, wenn er keinen Schaden leiden soll. Es ist dieses also eben so viel, als wenn der Gläubiger ein Capital von 4000 fl. zu 4 Procent 6 Jahre lang ausstehen hätte, und am Ende eines jeden Jahres, das Ende des letzten ausgenommen, also am Ende eines jeden der fünf Jahre die Summe von 4000 fl. dazu legte, und man fragt, wie das anfängliche Capital am Ende des sechsten Jahres bei zusammengesetzten Zinsen angewachsen ist.

Hier ist $a = 4000$ $c = 4000$, also $a = c$, $k = 4$ und $n = 6$. Also $100 + k = 104$ und $(100 + k) c = 104 . 4000 = 416000$. Ferner $\left(\frac{100+k}{100}\right)^n = \left(\frac{104}{100}\right)^6$. Dieser Werth wird logarithmisch entwickelt.

Es

Es ist nemlich $\log. \left(\frac{104}{100}\right)^6 = 6 \log. \frac{104}{100} =$
$6(\log. 104 - \log. 100)$.

Nun ist $\log. 104 - \log. 100 = 0{,}0170333$
multipl. mit 6 $\quad 6$

$\log. \left(\frac{104}{100}\right)^6 = 0{,}1021998$

Folglich $\left(\frac{104}{100}\right)^6$ als die zu diesem Logarithmus gehörige Zahl $= 1{,}265318$ und $\left(\frac{104}{100}\right)^6 - 1 =$
$1{,}265318 - 1 = 0{,}265318$

Also $w = \frac{0{,}265318 . 416000}{4}$
oder $w = 0{,}265318 . 104000$
d. i. $w = 27593{,}072$

Die Schuld beläuft sich also, am Ende des sechsten Jahres, auf 27593 fl. 4 Kr.

Würde gefragt, wie viel der Kaufmann am Anfang des sechsten oder am Ende des fünften Jahres schuldig ist, so müßte nach der Formel in der ersten Anmerkung gerechnet werden, in welcher $a = c = 4000$, $k = 4$, $n = 5$ ist und t gesucht wird. Nach gehöriger Rechnung findet man $t = 26531{,}8$ fl. Sollte der Kaufmann erst am Ende des 8ten oder mit dem Anfang des 9ten Jahres bezahlen, und man fragt, wie viel er, wenn zusammengesetzte Zinsen gerechnet werden, zu entrichten hätte, so be-

rechne

rechne man erstens, wie hoch das Capital am Ende des fünften Jahres sich beläuft, (nach der Formel in der ersten Anmerkung,) weil die Termingelder bis zu dem Ende des fünften Jahres bestimmt sind, wenn der Schuldner sechs Jahre nacheinander und zwar mit Anfang eines jeden Jahres die nemliche Summe bezahlen soll. Hierauf sehe man das gefundene Quantum t als ein Capital C an, das der Gläubiger erhalten, aber dem Schuldner sogleich wieder geliehen hat, und welches dieser drei Jahre lang behält ohne Zinsen zu bezahlen. Man berechne also wie hoch sich das Capital C nach 3 Jahren beläuft, entweder mit den dazu gerechneten dreijährigen einfachen Zinsen, nach der Formel §. 3. Seite 150, oder mit den dazugerechneten zusammengesetzten Zinsen, nach der Formel §. 7. Seite 156. $\left(\frac{104}{100}\right)^3 C$, d. i. $3(\log. 104 - \log. 100) + \log. C$.

Aehnliches Exempel zur Uibung.

Jemand hat eine gewisse Summe zu fordern, die ihm aber erst nach 20 Jahren ausbezahlt werden soll, und bis dahin von dem jetzigen Besitzer derselben benützt werden darf. Beide vereinigen sich, daß solche in 20jährlichen Termingeldern, jedes zu 322 fl. 54 Kr. mit Anfang eines jeden Jahres bezahlt werde, die Zinsen zu 4 Procent und zwar zusammengesetzte Zinsen gerechnet. Wie groß ist die

Sum-

Summe? (Die 54 Kr. sind = 0,9 fl. also 322 fl. 54 Kr. = 322,9 fl.) Antwort 9999,9 fl. oder sehr nahe 10000 fl.

Fünfte Aufgabe.

Jemand hat ein Capital c zu k jährlichem Procent auf Zinsen ausstehen, wie viel darf er am Ende eines jeden Jahres wegnehmen, wenn das Capital c am Ende des nten Jahres die Größe q betragen soll?

Hier wird a gesucht, und dabei finden zwei Fälle statt.

Erster Fall. Wenn der Capitalist den jährlichen Zins z des Capitals, und noch dazu etwas = x wegnimmt, so daß die Summe z + x in jedem Jahre einerlei Größe hat, oder = a ist. Nach dieser Voraussetzung ist a größer als der jährliche Zins z. Nun kann a aus der Formel, welche in dem ersten Fall der dritten Aufgabe so angegeben ist:

$$\frac{100a - qk}{100a - ck} = \left(\frac{100 + k}{100}\right)^n$$

auf folgende Art entwickelt werden. Es ist

$$100a - qk = 100a\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - ck\left(\frac{100+k}{100}\right)^n$$

$$\text{also } ck\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - qk = 100a\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 100a$$

$$\text{und } \left[c\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - q\right]k = \left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right]100a$$

folglich $$\frac{\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - q\right]k}{100\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right]} = a$$

also $$\log.\left[c\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - q\right] + \log. k -$$

$$\log.\left(100\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right]\right) = \log. a$$

Z. B. Ein Capitalist hat ein Capital von 25000 fl. zu 5 Procent ausstehen und braucht jährlich mehr als die Zinsen des Capitals betragen, wie groß darf die Summe $z+x$ oder a seyn, die er am Ende eines jeden Jahres wegnimmt, wenn von dem Capital am Ende des 12ten Jahr noch die Hälfte übrig seyn soll?

Hier ist $c = 25000$, $q = \frac{25000}{2}$ oder $= 12500$, $k = 5$ und $n = 12$.

Also $\left(\frac{100+k}{100}\right)^n = \left(\frac{105}{100}\right)^{12}$. Dieser Werth muß zuerst logarithmisch entwickelt werden. Es ist nemlich $\log.\left(\frac{105}{100}\right)^{12} = 12\,(\log. 105 - \log. 100)$

Nun ist log. 105 — log. 100 = 0,0211893
Multipl. mit 12 — 12

423786
211893

$$\log.\left(\frac{105}{100}\right)^{12} = 0{,}2542716$$

Die

Die zu diesem Logarithm. gehörige Zahl, oder $\left(\frac{105}{100}\right)^{12}$ ist $= 1,795856$. Also ist $\left(\frac{105}{100}\right)^{12} - 1$ $= 0,795856$ und $100\left[\left(\frac{105}{100}\right)^{12} - 1\right] = 79,5856$.

Ferner $c\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n} = 25000\left(\frac{105}{100}\right)^{12} =$

$25000 . 1,795856 = 44896,4$. Folglich $c\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n} - q = 25000 . \left(\frac{105}{100}\right)^{12} - 12500 =$ $44896,4 - 12500 = 32396,4$. Also ist, wenn man in der Formel die berechneten Werthe substituiret, log. $32396,4 +$ log. $5 -$ log. $79,5856 =$ log. a

Nun ist log. $32396,4 = 4,5104967$
log. $5 = 0,6989700$
Summe $= 5,2094667$
log. $79,5856 = 1,9008344$
log. a $= 3,3086323$

Folglich $a = 2035,318$ fl., oder in ganzen Zahlen 2035 fl.

Zweiter Fall. Wenn der Capitalist am Ende eines jeden Jahres eine Summe a wegnimmt, welche weniger beträgt, als die jährlichen Zinsen z des Capitals c, oder wenn a kleiner als z ist, und das übrige zum Capital geschlagen, oder wieder als Capital auf Zinsen ausgeliehen wird.

Hier kann a aus der Formel, welche in dem zweiten Fall der dritten Aufgabe so angegeben ist:

$$\frac{qk - 100a}{ck - 100a} = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n$$

auf folgende Art entwickelt werden.

Es ist $qk - 100a = ck\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 100a\left(\frac{100+k}{100}\right)^n$

also $100a\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 100a = ck\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - qk$

folglich $\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right] 100a = \left[c\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - q\right]k$

und $a = \frac{\left[c\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - q\right]k}{100\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right]}$

folglich $\log. a = \log. \left[c\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - q\right] + \log. k -$

$\log. \left(100\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right]\right)$

Es ist also die Formel für a wie in dem ersten Fall.

Sechste Aufgabe.

Jemand hat ein Capital c zu k Procent auf Zinsen ausstehen, und schlägt nicht nur die Zinsen zu dem Capital, sondern legt auch am Ende eines jeden Jahres eine gewisse Summe dazu, welche gleichfalls zu k Procent verzinset, und die Zinsen wieder zum Capital geschlagen werden. Es wächst nun das Capital auf diese Art nach n Jahren zu

der

der Größe t an, wie groß ist die jährlich zugelegte Summe?

Es sei solche = a, so kann a auf folgende Art bestimmt werden.

Man nehme die in der zweiten Anmerkung der ersten Aufgabe, Seite 183 hergeleitete Formel

$$\frac{100a + tk}{100a + ck} = \left(\frac{100 + k}{100}\right)^n$$

und entwickle aus ihr den Werth von a.

Es ist nemlich

$$100a + tk = 100a\left(\frac{100+k}{100}\right)^n + ck\left(\frac{100+k}{100}\right)^n$$

also $tk - ck\left(\frac{100+k}{100}\right)^n = 100a\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 100a$

folglich $$\frac{\left[t - c\left(\frac{100+k}{100}\right)^n\right]k}{100\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right]} = a$$

Daher $\log.\left[t - c\left(\frac{100+k}{100}\right)^n\right] + \log. k -$

$\log.\left(100\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right]\right) = \log. a$

Erste Anmerkung.

Wenn a = c und c unbekannt ist, so substituire man in der obigen Formel c statt a, so giebt dieses

$$\frac{100c + tk}{100c + ck} = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n$$

 Also

Also $100c + tk = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n (100+k)c$

ferner $tk = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n (100+k)c - 100c$

oder $tk = \left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n (100+k) - 100\right]c$

also $$\frac{tk}{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n (100+k) - 100} = c$$

folglich

$$\log.t + \log.k - \log.\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)(100+k) - 100\right] = \log.c$$

Zweite Anmerkung.

Wenn die Summe a am Ende eines jeden Jahres zu dem Capital c gelegt wird, nur am Ende des nten oder letzten Jahres nicht, und es ist der Werth des Capitals c am Ende des nten Jahres $= w$, so ist (erste Aufgabe, vierte Anmerkung)

$$w = \frac{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n (100a+ck) - 100a}{k} - a$$

Daraus wird nun a auf folgende Art entwickelt;

Es ist $$w = \frac{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n (100a+ck) - 100a - ak}{k}$$

also

$$wk = ck\left(\frac{100+k}{100}\right)^n + 100a\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 100a - ak$$

oder

$$\text{od. } wk = ck\left(\frac{100+k}{100}\right)^n + \left(\frac{100+k}{100}\right)^n 100a - (100+k)a$$

und

$$wk - ck\left(\frac{100+k}{100}\right)^n = \left[100\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - (100+k)\right]a$$

folglich

$$\frac{\left[w - c\left(\frac{100+k}{100}\right)^n\right]k}{100\left(\frac{100+k}{100}\right)^n (100+k)} = a$$

daher

$$\log.\left[w - c\left(\frac{100+k}{100}\right)^n\right] + \log. k -$$

$$\log.\left[100\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - (100+k)\right] = \log. a.$$

Dritte Anmerkung.

Ist ferner $a = c$, so substituire man diesen Werth c statt a in der Formel, Seite 214.

so ist

$$w = \frac{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n (100a + ck) - 100a - ak}{k}$$

$$w = \frac{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n (100c + ck) - 100c - ck}{k}$$

oder

$$w = \frac{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n (100+k)c - (100+k)c}{k}$$

also

$$wk = \left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right](100+k)c$$

und $$\frac{wk}{\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right](100+k)} = c$$

folglich $\log. w + \log. k -$

$$\log.\left(\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right](100+k)\right) = \log. c.$$

Z. B. Jemand hat nach 20 Jahren 10000 fl. zu fordern, von denen bis zu diesem Zeitpunkt der jetzige Besitzer die Zinsen zieht. Er will aber während dieser 20 Jahre mit Anfang eines jeden Jahres eine gleiche Summe erhalten, so daß mit diesen 20 Termingeldern die Schuld am Ende des 20sten Jahres ganz abgetragen sey. Wie viel muß ihm jährlich gegeben werden, wenn die Zinsen zu 4 Procent, und zusammengesetzte Zinsen gerechnet werden?

Wenn der Gläubiger mit Anfang des ersten Jahres die Summe c erhält, so kann er diese 20 Jahre lang benützen und Zinsen von Zinsen ziehen. Erhält er nun am Anfang des zweiten oder am Ende des ersten Jahres wieder die Summe c, so kann er diese gleichfalls ausleihen und Zinsen von Zinsen ziehen. Er vermehrt also das anfängliche Capital c um die Summe c, und so auch in den folgenden Jahren, nur am Ende des 20sten Jahres nicht, in diesem Zeitpunkt aber müssen diese einzelnen erhaltenen Summen, nebst ihren zusammenge-

setzten

setzten Zinsen 10000 fl. betragen. Es ist also eben so viel, als besitze er gleich anfangs das Capital c, welches auf Zinsen ausgeliehen ist und lege am Ende eines jeden Jahres eine gleiche Summe dazu auf Zinsen, nur am Ende des letzten Jahres nicht, so daß dadurch das Capital c am Ende des 20sten Jahres auf 10000 fl. angewachsen ist. Folglich kann c vermittelst der letzten Formel berechnet werden.

Es ist hier nemlich $w = 10000$, $k = 4$ und $n = 20$. Also $100 + k = 104$ und $\left(\frac{100+k}{100}\right)^n = \left(\frac{104}{100}\right)^{20}$. Dieser Ausdruck wird logarithmisch berechnet.

Es ist aber $\log. \left(\frac{104}{100}\right)^{20} = 20 (\log. 104 - \log. 100)$.

Nun ist $\log. 104 - \log. 100 = 0{,}0170333$

$$\frac{\qquad\qquad 20}{\log. \left(\frac{104}{100}\right) = 0{,}3406660}$$

Folglich die zu diesem Log. gehörige Zahl, oder $\left(\frac{104}{100}\right)^{20} = 2{,}191119$ und $\left(\frac{104}{100}\right)^{20} - 1 = 1{,}191119$.

Ferner $\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right](100+k)$ oder

$\left[\left(\frac{104}{100}\right)^{20} - 1\right] 104 = 1{,}191119 \cdot 104 = 123{,}8763$.

Also ist $\log. 10000 + \log. 4 - \log. 123{,}8763 = \log. c$

Es

Es ist aber log. 10000 = 4,0000000
log. 4 = 0,6020600

4,6020600
log. 123,8763 = 2,0929881

log. c = 2,5090719

Also c = 322,9029 oder 322 fl. 54 Kr.

Aehnliches Exempel zur Uibung.

1) Jemand hat nach acht Jahren 6400 fl. zu fordern, von denen bis zu diesem Zeitpunkt der jetzige Besitzer die Zinsen zieht. Dieser will aber mit Anfang eines jeden Jahres eine gleiche Summe bezahlen, so daß die Schuld mit 8 Termingeldern am Ende des achten Jahres abgetragen sey. Wie viel Gulden muß er jährlich entrichten, wenn die Zinsen zu $5\frac{1}{2}$ Procent, und zusammengesetzte Zinsen gerechnet werden? Antw. 624,0102 oder sehr nahe 624 fl.

2) Jemand sollte sechs Jahre nach einander, und zwar mit Anfang eines jeden Jahres eine gewisse Summe entrichten, er bezahlte aber nichts, und auf diese Art fand sich, daß am Ende des sechsten Jahres, wenn man zusammengesetzte Zinsen zu 4 Procent rechnet, seine Schuld auf 27593 fl. aufgelaufen war. Wie groß war die Summe, die er jährlich hätte bezahlen sollen? Antw. Sehr nahe 4000 fl.

Sie-

Siebente Aufgabe.

Jemand hat ein Capital c zu k jährlichen Procent auf Zinsen ausstehen, wie viel muß er am Ende eines jeden Jahres wegnehmen, wenn das Capital am Ende des nten Jahres aufgezehrt seyn soll?

Hier wird a gesucht. Dieses a beträgt alle Jahre so viel als der dießjährige Zins z des Capitals nebst einer Größe x, oder a ist $= z + x$.

Nun wird a gefunden vermittelst der Formel, welche in dem ersten Fall der fünften Aufgabe, (Seite 210) so angegeben ist:

$$\frac{\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n c - q\right] k}{100\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right]} = a$$

Da aber das Capital nach n Jahren aufgezehret ist, so ist der Rest q = Null. Folglich ist

$$\frac{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n ck}{100\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right]} = a$$

Also $n[\log.(100+k) - \log.100] + \log.c + \log.k - \log.\left(100\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right]\right) = \log.a$

Z. B. Jemand hatte ein Capital von 100000 fl. zu 5 Procent ausstehen. Er konnte aber mit dessen

sen Zinsen seinen Aufwand nicht bestreiten, und nahm von dem Capital am Ende eines jeden Jahres so viel weg, daß es mit den diesjährigen Zinsen immer eine gleiche Summe a betrug. Am Ende des 37sten Jahres war das Capital völlig aufgezehrt. Wie viel brauchte er jährlich?

Hier ist $c = 100000$, $k = 5$ und $n = 37$. Also $100 + k = 105$. Folglich

$$37(\log. 105 - \log. 100) + \log. 100000 + \log. 5 - \log. \left(\left[\left(\frac{105}{100}\right)^{37} - 1\right]100\right) = \log. a.$$

Es ist aber log. 105 − log. 100 =	0,0211893
mult. mit 37	37
	1483251
	635679
$\log. \left(\frac{105}{100}\right)^{37} =$	0,7840041

Dazu gehört die Zahl	$6,081407 = \left(\frac{105}{100}\right)^{37}$
davon ab	1
	5,081407
mult. mit 100	508,1407
davon ist der log. =	2,7059840

Nun war 37 (log. 105 − log. 100) =	0,7840041
ferner ist log. 100000 =	5,0000000
und log. 5 =	0,6989700
Summe =	6,4829741
davon ab	2,7059840
log. a =	3,7769901

Also a = 5984 fl. sehr nahe.

Zehn-

Aehnliche Exempel zur Uibung.

1) Jemand hat sogleich 1200 fl. zu bezahlen, oder, wenn er sie länger behält, mit 4 Procent zu verzinsen. Er will aber seine Schuld in sieben jährlichen Terminen abtragen, so daß er am Ende eines jeden Jahres eine gleiche Summe entrichtet. Wie groß ist jedes Termingeld? Antw. 199,9319 oder beinahe 200 fl.

2) Es hat jemand sogleich 8000 fl. zu entrichten, oder wenn er sie länger behält, mit 6 Procent zu verzinsen. Er will aber seine Schuld in acht jährlichen Terminen abtragen, so daß er am Ende eines jeden Jahres eine gleiche Summe bezahlt. Wie groß ist jedes Termingeld. Antwort. 1288,286 fl. oder 1288 fl. 17 Kr.

Erste Anmerkung.

Wenn a nicht am Ende, sondern am Anfang eines jeden Jahres, nemlich am Anfang des ersten Jahres u. s. f. und endlich am Anfang des n + 1ten Jahres weggenommen wird, und der Rest = q ist, so muß man in der Formel (fünfte Aufgabe, erster Fall,)

$$\frac{100a - qk}{100a - ck} = \left(\frac{100 + k}{100}\right)^n$$

c — a statt c setzen. Denn wenn gleich mit dem Anfang des ersten Jahres a von c weggenommen wird,

wird, so ist blos c — a als Capital zu betrachten. Folglich

$$\frac{100a - qk}{100a - (c - a)k} = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n$$

oder $$\frac{100a - qk}{100a - ck + ak} = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n$$

d. i. $$\frac{100a - qk}{(100+k)a - ck} = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n$$

Wenn man ferner nach der in der Aufgabe angegebenen Art reduciret, so findet man

$$\frac{\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n c - q\right]k}{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n (100+k) - 100} = a$$

Wenn aber das Capital c am Anfang des n + 1ten Jahres aufgezehret ist, so ist in dieser Formel q = 0, folglich

$$\frac{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n ck}{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n (100+k) - 100} = a$$

Also ist $n\,[\log.(100+k) - \log.100] + \log.c + \log.k - \log.\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n (100+k) - 100\right] = \log.a$

Zweite Anmerkung.

Wenn die Summe a, wie in der ersten Anmerkung, am Anfang eines jeden Jahres, aber

zum

zum letztenmal nicht bei dem Anfang des $n+1$ten, sondern bei dem Anfang des $n$ten Jahres, oder zu Ende des $n-1$ten Jahres weggenommen wird, und es ist das anfängliche Capital $= c$, so muß von dem Capital c sogleich mit Anfang des ersten Jahres die Summe a abgerechnet, und $c-a$ als anfängliches Capital $= C$ betrachtet werden. Hierauf nehme man an, am Ende des ersten, zweiten, dritten, und endlich des $n-1$ten Jahres, werde jedesmal die Summe a weggenommen. Wenn nun gefragt wird, wie groß diese Summe a ist, wenn das Capital c bei dem Anfang des $n$ten Jahres, nach der zum letztenmal weggenommenen Summe a, den Werth q geben soll, so nehme man die Formel in der zweiten Anmerkung der dritten Aufgabe, Seite 202.

$$\frac{100a - qk}{100a - Ck} = \left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}$$

substituire in ihr $c-a$ statt C, und suche a auf folgende Art:

$$\frac{100a - qk}{100a - (c-a)k} = \left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}$$

also $$\frac{100a - qk}{100a - (ck-ak)} = \left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}$$

und $$\frac{100a - qk}{100a - ck + ak} = \left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}$$

oder $$\frac{100a - qk}{(100a+k)\,a - ck} = \left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}$$

folg-

folglich

$$100a - qk = (100+k)a\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1} - ck\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}$$

also

$$ck\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1} - qk = (100+k)\,a\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1} - 100a$$

ferner

$$\left[c\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1} - q\right]k = (100+k)a\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1} - 100a$$

daher

$$\frac{\left[c\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1} - q\right]k}{(100+k)\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1} - 100} = a$$

Wenn nun ferner gefragt wird, wie groß die mit Anfang eines jeden Jahres wegzunehmende Summe a ist, wenn das Capital c bei dem Anfang des nten Jahres, nach der zum letztenmal weggenommenen Summe a Null seyn soll, folglich, wenn die zuletzt weggenommene Summe a während des nten Jahres verbraucht worden, am Ende des nten Jahres alles rein aufgezehret ist, so ist in der vorigen Formel q = Null, also ist für diesen Fall:

$$\frac{ck\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}}{(100+k)\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1} - 100} = a.$$

Also ist

$$(n-1)\,[\log.\,(100+k) - \log.\,100] + \log.\,c + \log.\,k - \log.\left[(100+k)\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1} - 100\right] = \log.\,a.$$

Z. B.

Z. B. Jemand will mit 10400 fl. 10 Jahre lang auskommen, wie viel darf er mit Anfang eines jeden Jahres wegnehmen, die Zinsen des Capitals zu 4 Procent gerechnet.

Hier ist $n = 10$, $c = 10400$ und $k = 4$, also $n - 1 = 9$, $100 + k = 104$, folglich

$$9[\log. 104 - \log. 100] + \log. 10400 + \log. 4$$
$$- \log. \left[104\left(\frac{104}{100}\right)^9 - 100\right] = \log. a.$$

oder $0{,}1532997 + 4{,}0170333 + 0{,}6020600 -$

$$\log. \left[104\left(\frac{104}{100}\right)^9 - 100\right] = \log. a.$$

d. i. $4{,}7723930 - \log. \left[104\left(\frac{104}{100}\right)^9 - 100\right] = \log. a$

Da nun $\log. \left(\frac{104}{100}\right)^9 = 0{,}1532997$ und die zu ihm gehörige Zahl oder $\left(\frac{104}{100}\right)^9 = 1{,}42331$ ist, so ist $104 \left(\frac{104}{100}\right)^9 = 148{,}02424$ und

$104\left(\frac{104}{100}\right)^9 - 100 = 48{,}02424$. Zu dieser Zahl gehört der Logarithmus 1,6814605

also ist $4{,}7723930 - 1{,}6814605 = \log. a$

oder $3{,}0909325 = \log. a$

folglich $a = 1232{,}913$ oder $a = 1232$ fl. 54 Kr. 3 pf.

Achte Aufgabe.

Wie groß ist das Capital, welches zu k Procent ausgeliehen ist, und wenn man am Ende eines jeden

Jahres die Summe a wegnimmt, am Ende des nten Jahres die Größe q beträgt?

Hier wird der Werth des Capitals c gesucht, und dabei finden zwei Fälle statt.

Erster Fall. Wenn der jährliche Zins z des Capitals und noch etwas = x weggenommen wird, so daß die Summe z + x in jedem Jahre einerlei Größe hat, nemlich = a ist. Nach dieser Voraussetzung ist a größer als der jährliche Zins z: folglich c größer als q, weil auf diese Art das Capital abnimmt. Nun kann c aus der Formel, welche in dem ersten Fall der fünften Aufgabe, Seite 209, so angegeben ist:

$$\frac{100a - qk}{100a - ck} = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n$$

hergeleitet werden.

Denn es ist

$$100a - qk = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n 100a - \left(\frac{100+k}{100}\right)^n ck$$

also $\left(\frac{100+k}{100}\right)^n ck = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n 100a - 100a + qk$

folglich $c = \frac{\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right] 100a + qk}{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n k}$,

und $\log. c = \log. \left(\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right] 100a + qk\right) -$

$[n (\log. (100+k) - \log. 100) + \log. k]$

Z. B. Ein Capitalist hatte ein gewisses Capital zu 5 Procent ausstehen, und brauchte jährlich mehr als die Zinsen des Capitals betragen, nemlich so viel, daß es mit den jährlichen Zinsen zusammen 2035 fl. betrug. Diese Summe nahm er am Ende eines jeden Jahres weg, und am Ende des zwölften Jahres fand sich, daß von dem Capital noch 12500 fl. übrig waren. Wie groß war das Capital?

Hier ist $q = 12500$, $a = 2035$, $k = 5$, $n = 12$. Also $100a = 203500$, $qk = 62500$, und $\left(\frac{100+k}{100}\right)^n = \left(\frac{105}{100}\right)^{12}$. Diese Potenz wird zuerst logarithmisch berechnet. Nemlich es ist

$$\begin{array}{lr} \log. 105 - \log. 100 = & 0{,}0211893 \\ \text{mult. mit } 12 & 12 \\ \hline & 423786 \\ \log.\left(\frac{105}{100}\right)^{12} = & 211893 \\ \hline & 0{,}2542716 \end{array}$$

Die dazu gehörige Zahl, oder $\left(\frac{105}{100}\right)^{12}$ ist $= 1{,}795856$. Also ist $\left(\frac{105}{100}\right)^{12} - 1 = 0{,}795856$. Ferner ist $\log. k = \log. 5 = 0{,}6989700$. Also

$$\log. c = \log. (0{,}795856 . 203500 + 62500) - (0{,}2542716 + 0{,}6989700)$$

oder $\log. c = \log. (161956{,}696 + 62500) - 0{,}9532416$

d. i. $\log. c = \log. 224456{,}7 - 0{,}9532416$

oder $\log. c = 5{,}3511325 - 0{,}9532416$

 Also

Also log. $c = 4,3978909$

Folglich $c = 24997,17$ fl. oder fast 25000 fl.

Anmerkung.

Wenn q als ein Theil des Capitals c ausgedrückt ist, z. B. als die Hälfte, der dritte Theil, u. s. f. oder überhaupt als der mte Theil, so nehme man die vorige Formel

$$100a - qk = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n 100a - \left(\frac{100+k}{100}\right)^n ck$$

und substituire in ihr $\frac{1}{m}c$ oder $\frac{c}{m}$ statt q, so ist

$$100a - \frac{ck}{m} = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n 100a - \left(\frac{100+k}{100}\right)^n ck$$

also $\left(\frac{100+k}{100}\right)^n ck - \frac{ck}{m} = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n 100a - 100a$

oder $\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - \frac{1}{m}\right] ck = \left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right] 100a$

folglich $c = \dfrac{\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right] 100a}{\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - \frac{1}{m}\right] k}$

oder $\log. c = \log.\left(100\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right]\right) + \log. a$

$$- \log.\left(\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - \frac{1}{m}\right] k\right)$$

Z. B. Wenn in dem vorigen Exempel der Rest des Capitals am Ende des zwölften Jahres die Hälfte des anfänglichen Capitals c beträgt, und man sucht c, so ist $m = 2$, also $\frac{1}{m} = \frac{1}{2}$ oder

0, 5.

0, 5. Uebrigens ist, wie die vorige Rechnung zum Theil zeigt:

$$\log. c = \log. 161956{,}696 - \log. ([1{,}795856 - 0{,}5]5)$$

od. $\log. c = \log. 161956{,}7 - \log. (1{,}295856 \,.\, 5)$

od. $\log. c = \log. 161956{,}7 - \log. - 6{,}479280$

d. i. $\log. c = 5{,}2093988 - 0{,}8115267$

also $\log. c = 4{,}3978721$

Folglich $c = 24996{,}09$ fl.

Zweiter Fall. Wenn am Ende eines jeden Jahres eine Summe a weggenommen wird, welche weniger beträgt, als die jährlichen Zinsen z des Capitals, und das übrige der Zinsen, oder z — a jährlich zum Capital geschlagen wird. Hier wird das anfängliche Capital c nach und nach grösser, oder q ist größer als c. Wird nun c gesucht, so kann es aus der Formel, welche in dem zweiten Fall der dritten Aufgabe so angegeben ist:

$$\frac{qk - 100a}{ck - 100a} = \left(\frac{100 + k}{100}\right)^n$$

auf folgende Art entwickelt werden.

Es ist $qk - 100a = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n ck - \left(\frac{100+k}{100}\right)^n 100a$

also $qk + \left(\frac{100+k}{100}\right)^n 100a - 100a = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n ck$

folglich $\dfrac{qk + \left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right] 100a}{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n k} = c$

und $\log.\left(qk+\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n-1\right]100a\right)-$

$[n(\log.(100+k)-\log.100)+\log.k]=\log.c$

Diese Formel ist mit der vorigen im ersten Fall angegebenen ganz übereinstimmend.

Anmerkung.

Wenn q ein Vielfaches von c, das heißt das Doppelte, Dreifache u. s. w. oder überhaupt das mfache von c ist, z. B. wenn man fragt, wie groß ist das anfängliche Capital c, das zu 5 Procent nach 20 Jahren auf das doppelte angewachsen ist, da man am Ende eines jeden Jahres 1000 fl. von den Zinsen wegnahm, so setze man in der obigen Formel

$$\frac{qk-100a}{kc-100a}=\left(\frac{100+k}{100}\right)^n$$

mc statt q, so ist

$$\frac{mck-100a}{ck-100a}=\left(\frac{100+k}{100}\right)^n$$

also $mck-100a=\left(\frac{100+k}{100}\right)^n ck-\left(\frac{100+k}{100}\right)^n 100a$

und $\left(\frac{100+k}{100}\right)^n 100a-100a=\left(\frac{100+k}{100}\right)^n ck-mck$

folglich $\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n-1\right]100a=\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n-m\right]ck$

daher $\frac{\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n-1\right]100a}{\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n-m\right]k}=c$

und

$$\text{und } \log.\left(100\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right]\right) + \log. a -$$

$$\log.\left(\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - m\right]k\right) = \log. c.$$

Man findet also, wenn man nach dieser Formel rechnet, für das eben angeführte Beispiel, in welchem $k = 5$, $n = 20$, $a = 1000$ und $mc =$ den doppelten Capital, also $m = 2$ ist, daß $c = 50613{,}9$ oder fast 50614 fl. beträgt.

Neunte Aufgabe.

Jemand hat ein gewisses Capital zu k Procent auf Zinsen ausstehen, und schlägt nicht nur die Zinsen zu dem Capital, sondern legt auch am Ende eines jeden Jahres eine Summe a dazu, von der die Zinsen jährlich gleichfalls zu dem Capital geschlagen und folglich wieder zu k Procent verzinset werden. Wie groß ist das anfängliche Capital, welches auf diese Art nach n Jahren zu der Größe t angewachsen ist.

Es sey das gesuchte Capital $= c$, so kann c aus der in der zweiten Anmerkung der ersten Aufgabe, Seite 183, hergeleiteten Formel

$$\frac{100a+tk}{100a+ck} = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n$$

auf folgende Art entwickelt werden.

Es ist $100a + tk = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n 100a + \left(\frac{100+k}{100}\right)^n ck$

also $tk = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n 100a - 100a + \left(\frac{100+k}{100}\right)^n ck$

oder $tk = \left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right] 100a + \left(\frac{100+k}{100}\right)^n ck$

folglich $tk - \left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right] 100a = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n ck$

also $$\frac{tk - \left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right] 100a}{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n k} = c$$

daher $\log.\left(tk - \left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right] 100a\right) -$

$[n(\log.(100+k) - \log.100) + \log.k] = \log.c.$

Erste Anmerkung.

Wenn t ein Vielfaches von c, z. B. das Doppelte, das Dreifache u. s. w. oder überhaupt das m fache von c ist, so ist $t = mc$. Es sei also ein gewisses Capital auf Zinsen zu k Procent ausgeliehen, und es werden nicht nur die Zinsen, sondern auch am Ende eines jeden Jahres eine Summe $= a$ zu dem Capital geschlagen, so daß nach n Jahren das Capital m mal so groß ist, als es anfangs war. Wenn man nun fragt, wie groß war das anfängliche Capital c, so findet man den Werth von c, wenn man in der obigen Formel

$$\frac{100a + tk}{100a + ck} = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n$$

den Ausdruck mc statt t substituirt, und c entwickelt.

Es ist nemlich nach geschehener Substitution

$$\frac{100a+mck}{100a+ck}=\left(\frac{100+k}{100}\right)^n$$

also $100a+mck=100a\left(\frac{100+k}{100}\right)^n+ck\left(\frac{100+k}{100}\right)^n$

folglich $mck-ck\left(\frac{100+k}{100}\right)^n=100a\left(\frac{100+k}{100}\right)^n-100a$

oder $\left[m-\left(\frac{100+k}{100}\right)^n\right]ck=100\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n-1\right]a$

$$\text{also } c=\frac{100\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n-1\right]a}{\left[m-\left(\frac{100+k}{100}\right)^n\right]k}$$

daher $\log. c=\log.\left(100\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n-1\right]\right)+$

$\log. a-\left(\log.\left[m-\left(\frac{100+k}{100}\right)^n\right]+\log. k\right)$

Z. B. Wie groß ist das Capital, welches zu 5 Procent in drey Jahren sich verdoppelt, wenn nicht nur die Zinsen, sondern auch am Ende eines jeden Jahres noch 1000 fl. zum Capital geschlagen werden?

Hier ist $a=1000$, $k=5$, $n=3$ und $m=2$. Wenn man also in der Formel statt der Buchstaben die entsprechenden Zahlenwerthe substituirt, so ist:

$\log. c=\log.\left(100\left[\left(\frac{105}{100}\right)^3-1\right]\right)+\log. 1000-$

$\left(\log.\left[2-\left(\frac{105}{100}\right)^3\right]+\log. 5\right)$

Der

Der Ausdruck $\left(\frac{105}{100}\right)^3$ wird logarithmisch entwickelt. Man findet nemlich log. $\left(\frac{105}{100}\right)^3 = 3(\log. 105 - \log. 100) = 0{,}0635679$. Die dazu gehörige Zahl, oder $\left(\frac{105}{100}\right)^3$ ist $= 1{,}157625$. Folglich $\left(\frac{105}{100}\right)^3 - 1 = 0{,}157625$ und $2 - \left(\frac{105}{100}\right)^3 = 0{,}842375$.

Also $100\left[\left(\frac{105}{100}\right)^3 - 1\right] = 15{,}7625$. Daher ist

$\log. c = \lg. 15{,}7625 + \lg. 1000 - (\lg. 0{,}842375 + \lg. 5)$

und wenn man die Logarithmen aufsucht, so ist

$\log. c = 1{,}1976250 + 3 - (5{,}9255055 - 6 + 0{,}6989700)$

oder $\log. c = 4{,}1976250 - 0{,}6244755$

also $\log. c = 3{,}5731495$.

Die zu diesem Logarithmus gehörige Zahl oder c ist $= 3742{,}393$ oder beinahe $3742\frac{2}{5}$ fl.

Zweite Anmerkung.

Wenn die Summe a am Ende eines jeden Jahres zu dem Capital gelegt wird, nur am Ende des nten oder letzten Jahres nicht, und es ist das Capital am Ende des nten Jahres zur Größe w angewachsen, so findet man das Capital c aus der Formel, welche in der vierten Anmerkung der ersten Aufgabe, Seite 185, so angegeben ist:

$$w = \frac{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n (100a + ck) - 100a}{k} - a$$

Dar-

Daraus wird c auf folgende Art entwickelt:

$$wk = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n 100a + \left(\frac{100+k}{100}\right)^n ck - 100a - ak$$

also

$$wk = \left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right] 100a - ak + \left(\frac{100+k}{100}\right)^n ck$$

folglich $$\frac{(w+a)k - \left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right] 100a}{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n k} = c$$

daher $$\log.\left((w+a)k - \left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right] 100a\right) -$$

$$[n(\log.(100+k) - \log.100) + \log.k] = \log.c$$

Dritte Anmerkung.

Wenn in dem Fall der zweiten Anmerkung a = c ist, das heißt, wenn zu dem Capital c am Ende eines jeden Jahres, nur am Ende des letzten Jahres nicht, so viel gelegt wird, als das Capital c beträgt, so ist

$$\log.w + \log.k - \log.\left(\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right](100+k)\right) = \lg.c,$$

wie in der dritten Anmerkung, der sechsten Aufgabe, Seite 216, schon gezeigt wurde, und wie auch aus der vorigen Formel der zweiten Anmerkung, wenn man in ihr c statt a setzet, der Werth von c hergeleitet werden kann.

Zehnte Aufgabe.

Wie groß ist das Capital, welches, wenn am Ende eines jeden Jahres der jährliche Zins z und

noch

noch etwas = x weggenommen wird, so daß die Summe z + x in jedem Jahr einerlei Größe hat, oder = a ist, am Ende des nten Jahres aufgezehrt ist?

Hier wird der gesuchte Werth des Capitals c gefunden, vermittelst der Formel, welche im ersten Fall der achten Aufgabe, (Seite 226) so angegeben ist:

$$\log. c = \log. \left(\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right] 100a + qk\right) - [n(\log. (100+k) - \log. 100) + \log. k]$$

Da nemlich in dem jetzigen Fall das Capital c nach n Jahren aufgezehret ist, so ist der Rest q = Null, also auch qk = Null. Folglich ist

$$\log. c = \log. \left(100\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right]\right) + \log. a - [n(\log. (100+k) - \log. 100) + \log. k]$$

Z. B. Jemand hatte ein Capital c zu 5 Procent ausstehen. Er konnte aber mit den Zinsen seinen Aufwand nicht bestreiten, und nahm daher von dem Capital am Ende eines jeden Jahres so viel weg, daß es mit den dießjährigen Zinsen jedesmal 5984 fl. betrug. Am Ende des 37sten Jahres ist das Capital völlig aufgezehrt. Wie groß war das anfängliche Capital c?

Hier ist a = 5984, n = 37 und k = 5, also

$$\log. c = \log. \left(100\left[\left(\frac{105}{100}\right)^{37} - 1\right]\right) + \log. 5984 - [37 (\log. 105 - \log. 100) + \log. 5]$$

Zu-

Zuerst ist $\left(\frac{105}{100}\right)^{37}$ logarithmisch zu entwickeln. Es ist aber log. 105 − log. 100 = 0,0211893 und 37 (log. 105 − log. 100) oder log. $\left(\frac{105}{100}\right)^{87}$ = 0,7840041

Also die dazu gehörigo Zahl, oder $\left(\frac{105}{100}\right)^{37}$ =

6,081407
davon ab 1

so ist $\left(\frac{105}{100}\right)^{37} - 1$ = 5,081407

mult. mit 100 = 508,1407

davon ist der Logarithmus 2,7059840
Ferner ist log. 5984 = 3,7769916

erste Summe 6,4829756

Nun war 37 (log. 105 − log. 100) = 0,7840041
dazu addirt log. 5 = 0,6989700

zweite Summe 1,4829741

Diese zweite Summe von der ersten Summe abgezogen, giebt log. c = 5,0000015

Also c sehr nahe 100000 fl.

Aehnliche Exempel zur Uibung.

1) Ein Capitalist nimmt von einem zu 4 Procent ausstehenden Capital am Ende eines jeden Jahres so viel weg, daß es mit den Zinsen 2000 fl. beträgt. Am Ende des zwanzigsten Jahres ist das Capital aufgezehret, wie groß war es? Antwort: 27180 fl. sehr nahe.

2) Je-

2) Jemand hat ein gewisses Capital sogleich zu bezahlen, oder wenn er es länger behält, mit 4 Procent zu verzinsen. Nun will er seine Schuld in sieben jährlichen Terminen so abtragen, daß er am Ende eines jeden Jahres 200 fl. entrichtet. Wie viel beträgt der baare Werth des Capitals? Antwort: 1200,408 fl. oder 1200 fl. 24 Kr. sehr nahe.

3) Jemand will für einen Garten 8000 fl. sogleich baar bezahlen. Ein anderer Käufer erbietet sich in zehn jährlichen Terminen und zwar am Ende eines jeden Jahres 1000 fl. zu entrichten. Welches Gebot ist besser? Antw. Das Gebot des ersten. Denn wenn man den baaren Werth des Capitals, welches der zweite bietet, berechnet, so beträgt er nur 7537,623 fl.

Erste Anmerkung.

Wenn der jährliche Betrag a am Anfang eines jeden Jahres weggenommen wird, so wird das Capital c sogleich bei dem Anfang des ersten Jahres um a vermindert, von welchem Rest sodann mit Ende eines jeden, auch des nten Jahres, so viel weggenommen wird, daß es mit den jährlichen Zinsen = a ist. In diesem Fall findet man also vermittelst der in dieser Aufgabe angegebenen Formel, den log. (c−a). Die dazu gehörige Zahl giebt den Werth c−a und wenn man dazu a addirt,

so

so giebt die Summe den Werth des anfänglichen Capitals c.

Zweite Anmerkung.

Wenn die Summe a, wie in der ersten Anmerkung, am Anfang eines jeden Jahres, nemlich des ersten, zweiten, u. s. f. aber zum leztenmal nicht bei dem Anfang des n + 1ten, oder am Ende des nten Jahres, sondern bei dem Anfang des nten Jahres weggenommen wird, und es ist das anfängliche Capital, welches gesucht wird, und welches bei dem Anfang des nten Jahres die Größe q hat, = c, so findet man dieses c aus der Gleichung in der zweiten Anmerkung der siebenten Aufgabe, Seite 224,

nemlich aus

$$\left[c\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1} - q\right]k = (100+k)a\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1} - 100a$$

auf folgende Art:

$$ck\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1} - qk = a(100+k)\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1} - 100a$$

also

$$ck\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1} = a(100+k)\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1} - 100a + qk$$

und $c = \dfrac{a(100+k)\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1} - 100a + qk}{k\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}}$

oder

$$\text{oder } c = \frac{\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}(100+k) - 100\right]a + qk}{k\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}}$$

Also

$$\log. c = \log.\left(\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}(100+k) - 100\right]a + qk\right) - \left[(n-1)(\log.(100+k) - \log. 100) + \log. k\right]$$

Ist das Capital c am Anfang des nten Jahres, nachdem noch a zum letztenmal weggenommen worden, aufgezehret, so ist q = Null, also auch qk = 0. Folglich giebt die vorige Formel für diesen Fall

$$\log. c = \log.\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}(100+k) - 100\right] + \log. a - \left[(n-1)(\log.(100+k) - \log. 100) + \log. k\right]$$

Z. B. Jemand hatte ein Capital c zu 4 Procent auf Zinsen ausstehen. Er nahm mit Anfang des ersten Jahres sogleich 1233 fl. weg, und sodann bei dem Anfang eines jeden folgenden Jahres den jährlichen Zins des Capitals, und noch so viel dazu, daß die Summe jedesmal 1233 fl. betrug, am Anfang des zehnten Jahres war nach Wegnahme der gedachten Summe nichts mehr von dem Capital übrig. Wie viel betrug das anfängliche Capital c?

Hier ist a = 1233 fl., k = 4, und n = 10, also $n - 1 = 9$, $100 + k = 104$, und $\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1} = \left(\frac{104}{100}\right)^9$

also

also $\log. c = \log. \left[104\left(\frac{104}{100}\right)^9 - 100\right] + \log. 1233 -$
$[9(\log. 104 - \log. 100) + \log. 4]$

Nun ist $\log. 104 - \log. 100 = 0{,}0170333$
multiplicirt mit 9

also $9(\log. 104 - \log. 100) = 0{,}1532997$

Die zu diesem Logarithmus gehörige Zahl, oder $\left(\frac{104}{100}\right)^9$ ist $1{,}42331$ also $104\left(\frac{104}{100}\right)^9 = 104 \cdot 1{,}42331$ oder $= 148{,}02424$, davon 100 subtrahirt, so ist $48{,}02424 = 104\left(\frac{104}{100}\right)^9 - 100$. Man suche den zu dieser Zahl gehörigen Logarithmus, dieser ist $1{,}6814605$, ferner ist $\log. 1233 = 3{,}0909631$ u. $\log. 4 = 0{,}6020600$ also ist $\log. c = 1{,}6814605 + 3{,}0909631 -$
$[0{,}1532997 + 0{,}6020600]$

Nun ist

	1,6814605	0,1532997
	3,0909631	0,6020600
	4,7724236	0,7553597
ab	0,7553597	
log. c =	4,0170639	

Also c sehr nahe = 10400 fl.

Neunter Abschnitt.

Antichretischer Calcul.

§. 1.

Wenn jemand ein Capital aufnimmt, dem Gläubiger ein Pfand, das jährlich Nutzungen einträgt, z. B. ein Landgut übergiebt, und ihm anträgt, die Nutzungen, z. B. den jährlichen Ertrag des Landgutes zu behalten, so daß das Erhaltene an dem ausgeliehenen Capital und dessen jährlichen Zinsen abgerechnet wird, so heißt, wenn der Gläubiger in den Antrag williget, dieser Vertrag, der antichretische Vertrag.

§. 2. Der jährliche Ertrag des Pfandes kann entweder dem jährlichen Zins des ausgeliehenen Capitals gleich, oder größer oder kleiner seyn als dieser Zins. Im ersten Fall erhält der Gläubiger den jährlichen Ertrag des Pfandes statt der jährlichen Zinsen, und das Capital bleibt ungeändert, im zweiten Fall nimmt es nach und nach ab, im dritten Fall muß dem Gläubiger noch jedes Jahr so viel gezahlt werden, als der Uiberschuß des jährlichen Zinses des ausgeliehenen Capitals über den jähr-

lichen Ertrag des Pfandes beträgt, wenn das aber nicht geschieht, so wächst die Schuld durch den Uiberschuß der Zinsen.

Z. B. A. leihet dem B. 10000 fl. zu 5 Procent. Dafür erhält der Gläubiger A. ein Unterpfand von dem B., dessen Ertrag sich jährlich auf 500 fl. beläuft, welchen A. bezieht. Da hier der jährliche Zins der 10000 fl. auch 500 fl. beträgt, so bleibt der Werth des Capitals ungeändert, und A. erhält den jährlichen Ertrag des Pfandes statt der jährlichen Zinsen seines ausgeliehenen Capitals. Gesetzt aber, A. leihe dem B. 10000 fl. zu 4 Procent, wovon also der jährliche Zins 400 fl. beträgt, und erhalte ein Unterpfand von B., das jährlich 500 fl. einträgt, folglich 100 fl. mehr als der jährliche Zins des Capitals beträgt, so nimmt, wenn A. den jährlichen Ertrag des Unterpfandes bezieht, das Capital nach und nach immer mehr ab. Nemlich

von 10000 fl. Capital
abgerechnet 100 fl. am Ende des Jahrs

so ist noch übrig 9900 fl. am Ende des ersten Jahres.

Davon beträgt der jährliche Zins zu 4 Procent 396 fl. den A. am Ende des zweiten Jahres zu fordern hat, er erhält aber 500 fl. folglich 104 fl. zu viel, also

von 9900 fl. Capital
ab 104 fl. am Ende des Jahres

so ist noch übrig 9796 fl. am Ende des zweites Jahres.

Davon beträgt der jährliche Zins $391\frac{84}{100}$ fl. den A. am Ende des Jahres zu fordern hat, er erhält aber 500 fl., folglich 108,16 fl. zu viel, also

von 9796 fl. Capital
ab 108,16 fl. am Ende des Jahres

so ist noch übrig 9687,84 fl. am Ende des dritten Jahres u. s. ferner.

Man sieht leicht, daß die Berechnung dieser Aufgabe mit der Berechnung folgender Aufgabe einerlei ist. Jemand hat ein Capital von 10000 fl. zu 4 Procent ausstehen, und braucht jährlich 500 fl. Er nimmt also am Ende eines jeden Jahres den jährlichen Zins des Capitals, und dazu noch so viel von dem Capital, daß die ganze Summe 500 fl. beträgt. Daher können, zur Berechnung dieses Falls des antichretischen Vertrags, diejenigen Formeln gebraucht werden, welche in dem vorigen achten Abschnitt für die gesuchte Anzahl n der Jahre in der ersten Aufgabe, Seite 176 und in der zweiten Aufgabe, Seite 189, ferner für den gesuchten jährlichen Ertrag a des Pfandes in der fünften Aufgabe, ersten Fall, Seite 210, und in der siebenten Aufgabe, Seite 219, ferner für den gesuchten Rest

 q des

q des Capitals in der dritten Aufgabe, ersten Fall, Seite 197, endlich für den gesuchten Werth c des anfänglichen Capitals in der achten Aufgabe, ersten Fall, Seite 226, und in der zehnten Aufgabe, Seite 236, angegeben sind.

Erstes Beispiel.

Wenn die Anzahl n der Jahre gesucht wird, da das Capital c das zu k Procent ausgeliehen ist, durch den Uiberschuß des jährlichen Ertrags a des Unterpfands über die jährlichen Zinsen des Capitals bis auf den Rest q abgenommen hat. Hier wird die Formel der ersten Aufgabe, Seite 176 angewendet. A. leihet dem B. ein Capital von 25000 fl. zu 5 Procent, dagegen verpfändet B. dem A. ein Gut, welches jährlich 2000 fl. einträgt, und diesen Ertrag erhält der Gläubiger A. Nach wie viel Jahren werden von dem Capital noch 12500 fl. übrig seyn?

Hier wird die Anzahl n der Jahre gesucht, also nach der Formel, Seite 176 gerechnet. Es ist nemlich $c = 25000$, $a = 2000$, $k = 5$ und $q = 12500$.

Die Berechnung ist übrigens die nemliche, wie in dem Beispiel, Seite 177, folglich auch das Resultat = 12 Jahren, 154 Tagen, oder noch genauer, wie Seite 180 angegeben ist, nemlich 12 Jahre, 152 Tage.

Exempel zur Uibung.

Jemand entlehnt ein Capital von 45000 fl. zu 6 Procent, und verpfändet seinem Gläubiger ein Gut, dessen jährlicher reiner Ertrag im Durchschnitt auf 5350 fl. angeschlagen wird, welchen der Gläubiger bezieht. Nach wie viel Jahren sind von dem Capital noch 12000 fl. übrig? Antwort. Nach 9,57 Jahren, oder nach 9 Jahren, 208 Tagen.

Zweites Beispiel.

Wenn die Anzahl n der Jahre, da das Capital c aufgezehret ist, gesucht wird.

Hier wird nach der Formel der zweiten Aufgabe, Seite 189 gerechnet.

A. leihet dem B. ein Capital von 45000 fl. zu 5 Procent, dagegen verpfändet B. dem A. ein Gut, welches jährlich 4000 fl. einträgt, und diesen Ertrag erhält der Gläubiger. Nach wie viel Jahren ist das Capital aufgezehret, oder nach wie viel Jahren muß das Unterpfand wieder herausgegeben werden?

Es ist c = 45000, a = 4000 und k = 5. Uibrigens ist die Berechnung die nemliche, wie in dem Seite 189 aufgeführten Beispiel, folglich auch das Resultat 16 Jahre, 344 Tage.

Exempel zur Uibung.

1) Jemand nimmt ein Capital von 1000 fl. zu 5 Procent auf, und giebt dafür ein Pfand, das jähr-

jährlich 80 fl. einträgt. Nach wie viel Jahren muß der Gläubiger das Pfand wieder herausgeben? Antwort. Nach 20,103 Jahren, oder nach 20 Jahren, 37 Tagen.

2) Ein Capital von 400000 fl. wurde zu 5 Procent aufgenommen, und dem Gläubiger einige Güter verpfändet, die ihm jährlich 25000 fl. eintragen. Nach wie viel Jahren ist die Schuld getilgt? Antwort. Nach 32,98 Jahren, oder nach 32 Jahren, 357 Tagen.

3) Eine Gemeinde hat von ihrer Herrschaft 20000 fl. zu 5 Procent aufgenommen, und ihr dafür einen Wald verpfändet, der jährlich 1500 fl. reinen Nutzen abwirft. Wie lange darf die Herrschaft diesen Wald als Unterpfand benützen? Antwort. $22\frac{1}{2}$ Jahre.

Drittes Beispiel.

Wenn der Rest q gesucht wird, der von dem Capital c nach n Jahren übrig ist.

Hier wird nach der Formel in der dritten Aufgabe, erster Fall, Seite 197 gerechnet.

A. leihet dem B. ein Capital von 12000 fl. zu 5 Procent, dagegen verpfändet B. dem A. ein Gut, welches jährlich 800 fl. einträgt, und diesen Ertrag erhält der Gläubiger 14 Jahre lang, wie viel ist von dem Capital noch übrig, oder wie viel

hat, wenn nun der Vertrag aufgehoben wird, der Schuldner B. dem Gläubiger A. noch zu bezahlen?

Hier wird der Rest q des Capitals gesucht, also nach der Formel, Seite 197 gerechnet. Es ist nemlich c = 12000, a = 800, k = 5 und n = 14. Die Berechnung ist übrigens die nemliche, wie in dem, Seite 198 ausgeführten Beispiel, folglich auch das Resultat = 8080,276 fl.

Exempel zur Uibung.

1) Der Gutsbesitzer B. nimmt von dem Capitalisten A. ein Capital von 100000 fl. zu 5 Procent auf, und verpfändet seinem Gläubiger A. ein Landgut, dessen jährlichen Ertrag von 6000 fl. der Gläubiger A. 25 Jahre lang beziehen soll. Wie viel hat nach Verlauf dieser 25 Jahre der Schuldner B. dem Gläubiger A. noch zu bezahlen? Antwort. 52272,92 fl. oder sehr nahe 52273 fl.

2) Jemand hat 400000 fl. zu 5 Procent aufgenommen, und seinem Gläubiger ein Gut verpfändet, das jährlich 25000 fl. einträgt. Diesen Ertrag soll der Gläubiger 33 Jahre lang beziehen, wie viel ist nach Verlauf dieser Zeit zu bezahlen? Antwort. — 318,8 oder — $318\frac{4}{5}$ fl. (Da hier der gefundene Werth negativ ist, so deutet dieses an, daß nicht nur an dem Capital nichts mehr abzutragen, sondern schon zu viel abgetragen, folglich von dem

Gläubiger, der das Pfand benützt, wieder zurückzuzahlen ist. Es muß also der Gläubiger dem Schuldner 318 fl. 48 Kr. entrichten.)

Viertes Beispiel.

1) Wenn der jährliche Ertrag a des Pfandes gesucht wird, damit das Capital c zu k Procent nach n Jahren den Rest q giebt.

Hier wird nach der Formel in der fünften Aufgabe, erster Fall, Seite 210 gerechnet.

2) Wenn der jährliche Ertrag a des Pfandes gesucht wird, damit das Capital c zu k Procent nach n Jahren abbezahlt sei.

Hier wird nach der Formel in der siebenten Aufgabe, Seite 219 gerechnet.

Exempel zur Uibung.

1) Bei einem antichretischen Vertrag, der zwischen dem Gläubiger A. und dem Schuldner B. geschlossen wurde, war nach 25 Jahren das Capital von 100000 fl. zu 5 Procent bis auf 52273 fl. abgetragen, wie hoch belief sich der jährliche Ertrag des Pfandes? Antw. Auf 6000 fl.

2) Bei einem andern antichretischen Vertrag, war nach 22 Jahren das zu 5 Procent ausgeliehene Capital von 20000 fl. ganz abgetragen, was war der jährliche Ertrag des Pfandes? Antw. Sehr nahe 1500 fl.

Fünftes Beispiel.

Wenn der Werth c des Capitals gesucht wird, das zu k Procent nach n Jahren, bei dem jährlichen Ertrag a des Pfandes, den Rest q giebt.

Hier wird nach der Formel in der achten Aufgabe, erster Fall, Seite 226 gerechnet.

B. verpfändet dem A. ein Gut, das jährlich 2035 fl. einträgt, nach zwölf Jahren war das entlehnte Capital bis auf 12500 fl. abgetragen, wie viel betrug das entlehnte Capital, wenn 5 Procent jährliche Zinsen gerechnet werden?

Hier wird c gesucht, also nach der Formel Seite 226 gerechnet. Es ist nemlich $a = 2035$, $k = 5$, $n = 12$, $q = 12500$.

Die Berechnung ist übrigens ganz die nemliche, wie in dem Zahlenbeispiel, Seite 227, folglich auch das Resultat $= 24997,17$ fl. oder fast 25000 fl.

Exempel zur Uibung.

Gegen ein zu 5 Procent entlehntes Capital verpfändet B. ein Gut, das jährlich 2000 fl. einträgt. Nach $12\frac{5}{12}$ Jahren war das Capital bis auf 12500 fl. abgetragen, wie groß war es? Antwort. Sehr nahe 25000 fl. (Da hier $n = 12\frac{5}{12}$ ist, folglich $\left(\frac{100+k}{100}\right)^n = \left(\frac{105}{100}\right)^{12\frac{5}{12}}$ und $\log. \left(\frac{105}{100}\right)^{12\frac{5}{12}}$ $= 12\frac{5}{12} (\log. 105 - \log. 100) = 12\frac{5}{12} \cdot 0,0211893$, so

ver-

verwandle man $12\frac{5}{12}$ in den unächten Bruch $\frac{149}{12}$, multiplicire also 0,0211893 mit 149 und dividire das Product mit 12, so hat man den Logarithmus von $\left(\frac{105}{100}\right)^{12\frac{5}{12}}$, die übrige Berechnung hat keine Schwierigkeit.)

Sechstes Beispiel.

Wenn der Werth c des Capitals gesucht wird, das zu k Procent nach n Jahren, bei dem jährlichen Ertrag a des Pfandes, völlig abgetragen, oder dessen Rest = Null ist.

Hier wird nach der Formel in der zehnten Aufgabe, Seite 236 gerechnet.

B. verpfändet dem A. ein Gut, das jährlich 5984 fl. einträgt, nach 37 Jahren war das entlehnte Capital völlig abgetragen, wie groß war es, dessen jährlichen Zinsen zu 5 Procent gerechnet?

Hier wird c für den Rest Null gesucht, also nach der Formel, Seite 236 gerechnet. Es ist nemlich $a = 5984$, $k = 5$, $n = 37$.

Die Berechnung ist übrigens eben so, wie bei dem, Seite 236 angegebenen Zahlenbeispiel, folglich auch das Resultat = 100000 fl.

Exempel zur Uibung.

Gegen ein zu 5 Procent aufgenommenes Capital verpfändet der Schuldner einige Landgüter, die jährlich 25000 fl. eintragen. Nach 33 Jahren ist

ist die Schuld getilgt. Wie groß war das Capital? Antwort. Sehr nahe 400000 fl.

§. 3. Gesetzt endlich, der jährliche Ertrag des Pfandes sei kleiner als der jährliche Zins des ausgeliehenen Capitals, so daß folglich die Schuld durch den Uiberschuß der Zinsen wächst, so können zur Berechnung dieses Falls des antichretischen Vertrags, diejenigen Formeln gebraucht werden, welche in dem vorigen achten Abschnitt für die gesuchte Anzahl n der Jahre, in der ersten Aufgabe, ersten Anmerkung, Seite 181, ferner für den gesuchten Werth q des angewachsenen Capitals in der dritten Aufgabe, zweiten Fall, Seite 199, ferner für den gesuchten jährlichen Ertrag a des Pfandes in der fünften Aufgabe, zweiten Fall, Seite 212, endlich für den gesuchten Werth c des anfänglichen Capitals in der achten Aufgabe, zweiten Fall, Seite 230, angegeben sind.

Erstes Beispiel.

Wenn die Anzahl n der Jahre gesucht wird, da das zu k Procent ausgeliehene Capital c durch den Uiberschuß der jährlichen Zinsen über den jährlichen Ertrag a des Pfandes bis zur Größe q angewachsen ist.

Hier wird die Anzahl n der Jahre gesucht vermittelst der Formel, welche in der ersten Aufgabe, erste Anmerkung, Seite 181 angegeben ist.

A. leihet dem B. ein Capital von 36000 fl. zu 6 Procent, dagegen verpfändet B. dem A. ein Gut, welches jährlich 1600 fl. einträgt, und diesen Ertrag bezieht der Gläubiger. Da nun der jährliche Zins des Capitals zu 6 Procent 2160 fl. beträgt, folglich mehr als der jährliche Ertrag des Gutes, so wächst die Schuld nach und nach an. Es ist also die Frage, nach wie-viel Jahren sie auf das Doppelte des anfänglichen Capitals steigen wird?

Man nehme die Seite 181 angegebene Formel:

$$\frac{\log.(qk-100a)-\log.(ck-100a)}{\log.(100+k)-\log.100}=n$$

Es ist nemlich $c=36000$, $a=1600$, $k=6$, $q=2$ mal 36000 oder $=72000$, also ist

$qk=72000.6=432000$ $ck=36000.6=216000$

und $100a=160000$, folglich

$qk-100a=432000-160000=272000$, und

$ck-100a=216000-160000=56000$, daher

$$\frac{\log.272000-\log.56000}{\log.106-\log.100}=n$$

oder $$\frac{5{,}4345689-4{,}7481880}{2{,}0253059-2}=n$$

folglich $$\frac{0{,}6863809}{0{,}0253059}=n$$

oder

oder 27,12 = n. Also ist die Schuld nach 27 Jahren auf das Doppelte angewachsen.

Exempel zur Uibung.

Jemand nimmt ein Capital von 12500 fl. zu $5\frac{1}{2}$ Procent auf, und verpfändet dem Gläubiger einen Garten, dessen jährlichen Ertrag von 250 fl. er bezieht. Nach wie viel Jahren ist die Schuld auf 20000 fl. angewachsen? Antwort. Nach 12,404 Jahren.

Zweites Beispiel.

Wenn die Größe q gesucht wird, zu der das zu k Procent ausgeliehene Capital c durch den Uiberschuß der jährlichen Zinsen über den jährlichen Ertrag a des Pfandes nach n Jahren angewachsen ist.

Hier wird q gesucht vermittelst der Formel, die in der dritten Aufgabe, zweiten Fall, Seite 199 angegeben ist.

A. leihet dem B. ein Capital von 4500 fl. zu $5\frac{1}{2}$ Procent, dagegen verpfändet B. dem A. ein Haus, welches jährlich 100 fl. Miethe trägt, welchen Ertrag der Gläubiger bezieht. Wie hoch ist das Capital nach 20 Jahren angewachsen?

Hier ist $c = 4500$, $a = 100$, $k = 5\frac{1}{2}$ und $n = 20$. Die Berechnung ist übrigens eben so, wie bei dem, Seite 200 angegebenen Zahlenbeispiel, also auch das Resultat = 9643,089 fl.

Exem-

Exempel zur Uibung.

Jemand nimmt ein Capital von 36000 fl. zu 6 Procent auf, und verpfändet dem Gläubiger ein Gut, dessen jährlichen Ertrag von 1600 fl. er bezieht, wie hoch ist die Schuld am Ende des 27sten Jahres angewachsen? Antwort. Sehr nahe auf das Doppelte.

Drittes Beispiel.

Wenn der jährliche Ertrag a des Pfandes gesucht wird, damit das Capital c zu k Procent nach n Jahren zur Größe q anwachse.

Hier wird der jährliche Ertrag a des Pfandes gesuche, vermittelst der Formel, welche in der fünften Aufgabe, zweiten Fall, Seite 212 angegeben ist.

Viertes Beispiel.

Wenn der Werth c des anfänglichen Capitals gesucht wird, das zu k Procent nach n Jahren, bei dem jährlichen Ertrag a des Pfandes, zu der Größe q angewachsen ist.

Hier wird vermittelst der Formel in der achten Aufgabe, zweiten Fall, Seite 230 gerechnet.

Zehn=

Zehnter Abschnitt.

Waldbestandsberechnung.

§. 1.

Da ein Waldbestand, wenn das Revier geschont wird, durch den Nachwuchs jährlich zunimmt, so kann, wenn die Größe dieses jährlichen Nachwuchses im Durchschnitt für jedes Hundert Klafter bestimmt wird, so daß nemlich jährlich 100 Klafter Holz, k Klafter Zuwachs geben, der Waldbestand als ein Capital $= c$, und der Ertrag des jährlichen Nachwuchses als der jährliche Zins dieses Capitals betrachtet, und $= \frac{ck}{100}$ gesetzt werden. Nemlich 100 Klafter geben jährlich k Klafter Zuwachs, also geben c Klafter, welche der Waldbestand enthält, $\frac{ck}{100}$ Klafter jährlichen Zuwachs, folglich ist der Waldbestand nach einem Jahr $= c + \frac{ck}{100}$ Klaftern.

§. 2. Gesetzt nun, es werde jährlich eine bestimmte Menge Klafter $= a$, geschlagen, folglich um diese Menge a der Waldbestand c nebst dessen jährlichen Zuwachs $\frac{ck}{100}$ vermindert, so ist $c + \frac{ck}{100} - a$ die Größe des Waldbestandes am Ende des ersten Jahres. Es kann dieser Werth aber auch so ausgedrückt

gedrückt werden $\frac{100c+ck}{100} - a$ oder $\frac{100+k}{100}c - a$. Wenn aber 100 Klafter nach einem Jahr mit dem jährlichen Zuwachs k auf 100+k Klaftern sich belaufen, so wird eine Klafter nach einem Jahr $\frac{100+k}{100}$ Klafter betragen. Denn es verhält sich $100 : 100+k = 1 : \frac{100+k}{100}$. Wenn man diesen Werth $\frac{100+k}{100}$ der Bequemlichkeit der Rechnung wegen mit r bezeichnet, so ist $\frac{100+k}{100}c = rc$, u. $\frac{100+k}{100}c - a$ oder die Größe des Waldbestands nach einem Jahr $= rc - a$. Bezeichnet man diese Größe mit D, so kann man für das folgende Jahr wiederum schliesen, eine Klafter beträgt nach einem Jahr, mit dem jährlichen Zuwachs, r Klafter, auf wie viele Klafter belaufen sich die D Klaftern, mit dem dazu gerechneten jährlichen Zuwachs, oder, $1 : r = D : rD$. Werden von den am Ende des zweiten Jahres vorhandenen rD Klaftern wieder um a Klafter geschlagen, so ist $rD - a$ die Größe des Waldbestandes am Ende des zweiten Jahres. Substituirt man statt D den ihm gleichen Werth $rc - a$, so ist $r(rc - a) - a$ oder $r^2c - ra - a$ die Größe des Waldbestands am Ende des zweiten Jahres.

Wenn man weiter so fortfährt, wie Seite 175 gezeigt wurde, so findet man, wenn die Größe des Waldbestandes am Ende des nten Jahres nach den

zuletzt weggenommenen a Klaftern $= q$ ist, folgende Gleichung, die auch Seite 175 angegeben ist.

$$r^n c - r^{n-1} a - r^{n-2} a \,.\,. - r^2 a - ra - a = q$$

Nun setze man die Berechnung fort, wie Seite 176, so findet man auch die dort angegebene Formel, in der c die Anzahl der Klaftern des anfänglichen Waldbestandes, k das Procent, oder den Zuwachs, welchen 100 Klafter jährlich geben, a die Anzahl der gegen das Ende eines jeden Jahres geschlagenen Menge Klaftern, und q die Anzahl Klaftern, die den Waldbestand am Ende der n Jahre ausmachen, bedeutet.

Man sieht leicht, daß die folgenden Formeln im achten Abschnitt, die aus der auf Seite 176 angegebenen Formel hergeleitet sind, und dort auf Capitalien, Zinsen und Zeiten angewendet wurden, hier auch Bezug auf Waldbestand, jährlichen Zuwachs und Zeiten haben, und dazu dienen, die verschiedenen Fragen, welche denen im achten Abschnitt entsprechen, zu beantworten, auf die Art wie jetzt gezeigt werden soll.

Erstes Beispiel.

Wenn die Anzahl n der Jahre gesucht wird, da der Waldbestand c, dessen jährliches Zuwachsprocent k ist, durch den Uiberschuß der gegen das Ende eines jeden Jahres geschlagenen Anzahl von

a Klaf-

a Klaftern über den jährlichen Zuwachs, bis auf den Rest q abgenommen hat.

Hier wird die in der ersten Aufgabe, Seite 176 angegebene Formel gebraucht.

Ein Waldbestand beträgt 25000 Klaftern, das jährliche Zuwachsprocent ist 5 Klafter, d. h. 100 Klafter geben jährlich 5 Klafter Zuwachs.

Gegen das Ende eines jeden Jahres werden 2000 Klafter geschlagen. Nach wie viel Jahren, werden von dem anfänglichen Waldbestand noch 12500 Klafter übrig seyn?

Es ist $c = 25000$, $k = 5$, $a = 2000$ und $q = 12500$.

Die Berechnung ist übrigens die nemliche, wie in dem Beispiel Seite 177, folglich auch das Resultat = 12 Jahren, 154 Tagen.

Exempel zur Uibung.

Ein Waldbestand beträgt 682000 Klaftern, das jährliche Zuwachsprocent ist 2 Klafter. Gegen das Ende eines jeden Jahres werden 18750 Klaftern geschlagen. Nach wie viel Jahren werden von dem anfänglichen Waldbestand noch 136400 Klaftern übrig seyn? Antwort. Nach 57,7 Jahren, oder fast nach $57\frac{3}{4}$ Jahren.

Zweites Beispiel.

Wenn die Anzahl n der Jahre gesucht wird, da der Waldbestand c, dessen jährliches Zuwachs-

procent = k ist, durch den Uiberschuß der gegen das Ende eines jeden Jahres geschlagenen a Klafter über den jährlichen Zuwachs aufgezehret oder = Null ist.

Hier wird nach der Formel der zweiten Aufgabe, Seite 189 gerechnete

Bei einem Waldbestand von 45000 Klaftern ist das jährliche Zuwachsprocent 5 Klafter. Gegen das Ende eines jeden Jahres werden 4000 Klafter geschlagen. Nach wie viel Jahren ist der Waldbestand aufgezehret?

Es ist c = 45000, a = 4000 und k = 5. Uibrigens ist die Berechnung einerlei mit der in dem Seite 189 angegebenen Beispiel, folglich auch das Resultat 16 Jahre, 344 Tage, oder sehr nahe 17 Jahre.

Exempel zur Uibung.

1) Ein Forstrevier ist zu 473800 Klaftern abgeschätzt, und man weiß aus angestellten Versuchen, daß jährlich 100 Klafter sich um 2 Klafter vermehren. Am Ende eines jeden Jahres werden 12860 Klaftern geschlagen, nach wie viel Jahren wird der Waldbestand aufgezehrt seyn? Antw. Nach 67,41 Jahren.

2) Bei einem Waldbestand von 132650 Klaftern ist das jährliche Zuwachsprocent $1\frac{1}{2}$ Klafter, wie viele Jahre reichet er zu, wenn gegen das Ende eines jeden Jahres 3862 Klaftern geschlagen werden? Antwort. 48,63 Jahre.

Drit-

Drittes Beispiel.

Wenn der Rest q gesucht wird, der von dem Waldbestand c, dessen jährliches Zuwachsprocent = k ist, durch den Uiberschuß der gegen das Ende eines jeden Jahres geschlagenen a Klafter über den jährlichen Zuwachs, nach n Jahren übrig bleibt.

Hier wird nach der Formel in der dritten Aufgabe, erster Fall, Seite 197 gerechnet.

Bei einem Waldbestand von 12000 Klaftern ist das jährliche Zuwachsprocent 5 Klafter. Gegen das Ende eines jeden Jahres werden 800 Klafter geschlagen. Wie viele Klafter beträgt der Rest nach 14 Jahren? Es ist c = 12000, k = 5, a = 800 und n = 14.

Die Berechnung ist die nemliche, wie in dem, Seite 198 berechneten Beispiel, folglich auch das Resultat = 8080,276 Klaftern.

Exempel zur Uibung.

Ein Forstrevier ist zu 682000 Klaftern abgeschätzt, das jährliche Zuwachsprocent ist 2 Klafter. Gegen das Ende eines jeden Jahres werden 18750 Klaftern geschlagen. Wie viele Klafter beträgt der Rest am Ende des 58sten Jahres? Antw. 131746 Klaftern.

Viertes Beispiel.

Wenn a gesucht wird, d. h. wie viele Klafter am Ende eines jeden Jahres geschlagen werden dür-

fen, woferne der Waldbestand c, bei dem jährlichen Zuwachsprocent k, nach n Jahr bis auf den Rest q abnehmen soll.

Hier wird nach der Formel in der fünften Aufgabe, erster Fall, Seite 210 gerechnet.

Bei einem Waldbestand von 25000 Klaftern ist das jährliche Zuwachsprocent 5 Klafter. Am Ende des 12ten Jahres sind noch 12500 Klafter übrig. Wie viele Klafter wurden am Ende eines jeden Jahres geschlagen? Hier ist $c = 25000$, $k = 5$, $q = 12500$ und $n = 12$.

Die Berechnung ist die nemliche, wie in dem Seite 210 angegebenen Beispiel, folglich auch das Resultat = 2035,318 Klaftern.

Exempel zur Uibung.

Ein Waldbestand von 682000 Klaftern, dessen jährliches Zuwachsprocent 2 Klafter beträgt, hat am Ende des 58sten Jahres bis auf 131746 Klaftern abgenommen. Wie viele Klaftern wurden am Ende eines jeden Jahres geschlagen? Antwort. 18750 Klaftern.

Fünftes Beispiel.

Wenn a gesucht wird, d. h. wie viele Klaftern am Ende eines jeden Jahres geschlagen werden dürfen, woferne der Waldbestand c bei dem jährlichen Zuwachsprocent k, nach n Jahren Null seyn soll.

Hier

Hier wird nach der Formel in der siebenten Aufgabe, Seite 219 gerechnet.

Von einem Waldbestand, der auf 100000 Klaftern geschätzt wurde, und dessen jährliches Zuwachsprocent 5 Klafter beträgt, ist am Ende des 37sten Jahres nichts mehr übrig. Wie viele Klaftern wurden am Ende eines jeden Jahres geschlagen?

Es ist hier $c = 100000$, $k = 5$ und $n = 37$.

Die Berechnung ist übrigens die nemliche, wie in dem Seite 220 angegebenen Beispiel. Also auch das Resultat = 5984 Klaftern sehr nahe.

Exempel zur Uibung.

1) Wenn ein Waldbestand von 473800 Klaftern jährlich 2 Klafter Procent Zuwachs giebt, und 68 Jahre zureichen soll, wie viele Klafter dürfen am Ende eines jeden Jahres geschlagen werden? Antwort. 12807,61 Klafter.

2) Ein Waldbestand von 72396 Klaftern soll 60 Jahre zureichen, wie viele Klafter dürfen am Ende eines jeden Jahres geschlagen werden, wenn das jährliche Zuwachsprocent $1\frac{7}{8}$ ist. Antwort. 2020,138 Klaftern.

Sechstes Beispiel.

Wenn die Größe c des anfänglichen Waldbestands gesucht wird, dessen jährliches Zuwachsprocent k ist, und von welchem, bei der am Ende

eines jeden Jahres geschlagenen Anzahl Klaftern = a, nach n Jahren der Rest q übrig ist.

Hier wird nach der Formel in der achten Aufgabe, ersten Fall, Seite 226 gerechnet.

Von einem Waldbestand, dessen jährliches Zuwachsprocent 5 Klaftern beträgt, und von welchem am Ende eines jeden Jahres 2035 Klaftern weggenommen wurden, sind am Ende des zwölften Jahres noch 12500 Klaftern übrig, wie viele Klaftern enthielt dieser Waldbestand?

Es ist $a = 2035$, $k = 5$, $n = 12$ $q = 12500$.

Die Berechnung ist übrigens die nemliche, wie in dem Zahlenbeispiel, Seite 227, folglich auch das Resultat = 24997,17 Klaftern, oder fast 25000 Klaftern.

Exempel zur Uibung.

Aus einem Forstrevier wurden 58 Jahre lang, am Ende eines jeden Jahres 18750 Klaftern geschlagen, und es fand sich, daß noch 131746 Klaftern vorhanden waren. Wie groß war der anfängliche Waldbestand, das jährliche Zuwachsprocent zu 2 Klaftern gerechnet? Antwort. 682000 Klafter.

Siebentes Beispiel.

Wenn die Größe c des anfänglichen Waldbestands gesucht wird, dessen jährliches Zuwachsprocent = k ist, und von welchem bei der am Ende

eines

eines jeden Jahres geschlagenen Anzahl Klaftern = a nach n Jahren nichts mehr übrig ist.

Hier wird nach der Formel in der zehnten Aufgabe, Seite 236 gerechnet.

Von einem Waldbestand, dessen jährliches Zuwachsprocent 5 Klaftern beträgt, und von welchem am Ende eines jeden Jahres 5984 Klaftern weggenommen wurden, ist am Ende des 37sten Jahres nichts mehr übrig. Wie groß war dieser Waldbestand?

Es ist $a = 5984$, $k = 5$, $n = 37$.

Die Berechnung ist eben so, wie bei dem Seite 237 ausgerechneten Zahlenbeispiel, folglich auch das Resultat = 100000 Klaftern.

Exempel zur Uibung.

Aus einem Forstrevier wurden 68 Jahre lang, am Ende eines jeden Jahres 12808 Klaftern geschlagen, und nun war von dem Waldbestand nichts mehr übrig. Wie groß war der anfängliche Waldbestand, das jährliche Zuwachsprocent zu 2 Klaftern gerechnet? Sehr nahe 473800 Klafter.

§. 3. Gesetzt, der jährliche Zuwachs des Waldbestandes sei größer als diejenige Menge Klafter, welche am Ende eines jeden Jahres geschlagen wird, so nimmt der Waldbestand von Jahr zu Jahr immer mehr zu. Die Fragen, die dabei statt finden, sind folgende.

Erstes

Erstes Beispiel.

Wenn die Anzahl n der Jahre gesucht wird, da der Waldbestand c, dessen jährliches Zuwachsprocent k ist, durch den Uiberschuß des jährlichen Zuwachses über die gegen das Ende eines jeden Jahres geschlagene Menge Klafter = a, bis zur Größe q zugenommen hat. Hier wird die Anzahl n der Jahre gesucht vermittelst der Formel, welche in der ersten Aufgabe, erste Anmerkung, Seite 181 angegeben ist.

Zweites Beispiel.

Wenn die Größe q gesucht wird, die der Waldbestand c, dessen jährliches Zuwachsprocent k ist, durch den Uiberschuß des jährlichen Zuwachses über die gegen das Ende eines jeden Jahres geschlagene Menge von a Klaftern, am Ende des nten Jahres erreicht hat.

Hier wird q gesucht vermittelst der Formel, die in der dritten Aufgabe, zweiten Fall, Seite 199 angegeben ist.

Drittes Beispiel.

Wenn a gesucht wird, d. h. wie viele Klafter am Ende eines jeden Jahres geschlagen werden dürfen, woferne der Waldbestand c, bei dem jährlichen Zuwachsprocent k, nach n Jahren bis zur Größe q zunehmen soll.

Hier

Hier wird a gefunden vermittelst der Formel, welche in der fünften Aufgabe, zweiten Fall, Seite 212 angegeben ist.

Viertes Beispiel.

Wenn die Größe c des anfänglichen Waldbestandes gesucht wird, dessen jährliches Zuwachsprocent k ist, und der durch den Uiberschuß des jährlichen Zuwachses über die gegen das Ende eines jeden Jahres geschlagene Menge von a Klaftern, am Ende des nten Jahres bis zur Größe q zugenommen hat.

Hier wird c gesucht vermittelst der Formel, die in der achten Aufgabe, zweiten Fall, Seite 230 angegeben ist.

§. 4. Wenn die Menge von a Klaftern nicht zu Ende, sondern am Anfang eines jeden Jahres geschlagen wird, und zum letztenmal am Anfang des nten Jahres, so werden die Fälle, welche dabei statt finden auf folgende Art berechnet.

Erstes Beispiel.

Wenn die Anzahl n der Jahre gesucht wird, da der Waldbestand c, dessen jährliches Zuwachsprocent k ist, durch den Uiberschuß der am Anfang eines jeden Jahres geschlagenen Anzahl von a Klaftern über den jährlichen Zuwachs bis auf den Rest q abgenommen hat.

Hier

Hier wird die in der zweiten Aufgabe, zweite Anmerkung, Seite 194, auf der letzten Zeile angegebene Formel gebraucht.

Anmerkung.

Ist der jährliche Zuwachs des Waldbestandes c—a oder des C größer als die am Anfang eines jeden Jahres geschlagene Menge von a Klaftern, so daß der Waldbestand zunimmt, folglich q größer als c ist, so ist folgende Formel zu gebrauchen.

$$\frac{\log.(qk - 100a) - \log.(Ck - 100a)}{\log.(100 + k) - \log.100} + 1 = n.$$

Der Grund dieser Veränderung ist aus dem Seite 181 gesagten, leicht einzusehen.

Zweites Beispiel.

Wenn die Anzahl n der Jahre gesucht wird, da von dem Waldbestand c, dessen jährliches Zuwachsprocent = k ist, durch den Uiberschuß der am Anfang eines jeden Jahres geschlagenen a Klafter über den jährlichen Zuwachs, nichts mehr übrig ist.

Hier wird nach der Formel der zweiten Aufgabe, zweite Anmerkung, Seite 195 gerechnet.

Bei einem Waldbestand von 10400 Klaftern ist das jährliche Zuwachsprocent 4 Klafter. Am Anfang eines jeden Jahres werden 1233 Klafter geschlagen. Nach wie viel Jahren ist von dem Waldbestand nichts mehr übrig?

Es

Es ist a = 1233, k = 4, c = 10400, also c − a oder C = 9167. Uibrigens ist die Berechnung einerlei mit der, welche für ein ähnliches Beispiel, Seite 196, ausgeführt wurde, folglich auch das Resultat = 10 Jahren.

Exempel zur Uibung.

Ein Forstrevier wurde zu 473800 Klaftern abgeschätzt, und man weiß aus angestellten Versuchen, daß 100 Klafter jährlich um 2 Klaftern sich vermehren. Am Anfang eines jeden Jahres sollen 12860 Klaftern geschlagen werden, nach wie viel Jahren wird der Waldbestand zu Ende seyn? Antwort. Nach 64,719 Jahren.

Drittes Beispiel.

Wenn der Rest q gesucht wird, der von dem Waldbestand c, dessen jährliches Zuwachsprocent = k ist, durch den Uiberschuß der am Anfang eines jeden Jahres geschlagenen a Klafter über den jährlichen Zuwachs, bei dem Anfang des nten Jahres, nach der letzten Wegnahme der a Klafter, übrig bleibt.

Hier wird nach der Formel in der dritten Aufgabe, zweite Anmerkung, Seite 202 gerechnet.

Bei einem Waldbestand von 10400 Klaftern ist das jährliche Zuwachsprocent 4 Klafter. Am Anfang eines jeden Jahres werden 1233 Klafter geschla-

geschlagen. Wie viele Klafter sind von dem Waldbestand am Anfang des neunten Jahres nach eben zum leztenmal weggenommenen 1233 Klaftern noch übrig? Es ist $c = 10400$, $k = 4$, $a = 1233$ und $n = 9$. Also $c - a$ oder $C = 9167$ und $n - 1 = 8$.

Uibrigens ist die Berechnung einerlei mit der, welche für ein ähnliches Beispiel, Seite 202 und 203, ausgeführt wurde, folglich auch das Resultat $= 1184{,}55$ Klaftern.

Anmerkung.

Ist der jährliche Zuwachs $\frac{Ck}{100}$ des Waldbestandes $c - a$ oder des C größer als die am Anfange eines jeden Jahres geschlagene Menge von a Klaftern, so nimmt der Waldbestand zu, folglich wird auch q größer als c. Wenn aber $\frac{Ck}{100}$ größer als a ist, so ist $a - \frac{Ck}{100}$ negativ, folglich auch $100a - Ck$ eine negative Größe, $= (-D)$, also $Ck - 100a$ eine positive $= (+D)$. Eine zu subtrahirende negative Größe $(-D)$ ist aber so viel als eine zu addirende positive Größe $(+D)$, d. h. $-(-D)$ ist $= +(+D)$ oder $= +D$.

Also ist $-(100a - Ck) = +(Ck - 100a)$ Folglich auch

$$-\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}(100a - Ck) = +\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}(Ck - 100a).$$

Also

Also verändert sich die, Seite 202 angegebene Formel, für den Fall, daß der Waldbestand und folglich q zunimmt, in diese

$$\frac{100a + \left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}(Ck - 100a)}{k} = q.$$

Viertes Beispiel.

Wenn a gesucht wird, d. h. wie viele Klafter am Anfange eines jeden Jahres geschlagen werden dürfen, woferne der Waldbestand c, bei dem jährlichen Zuwachsprocent k, am Anfang des nten Jahres nach der letzten Wegnahme der a Klafter, die Größe q haben soll.

Hier wird nach der Formel in der siebenten Aufgabe, zweite Anmerkung, Seite 224 gerechnet.

Fünftes Beispiel.

Wenn a gesucht wird, d. h. wie viele Klafter am Anfang eines jeden Jahres geschlagen werden dürfen, woferne der Waldbestand c, bei dem jährlichen Zuwachsprocent k, am Anfang des nten Jahres, nach zum letztenmal weggenommenen a, zu Ende seyn soll.

Hier wird nach der Formel in der siebenten Aufgabe, zweite Anmerkung, Seite 224 gerechnet.

Von einem Waldbestand, der auf 10400 Klafter geschätzt wurde, und dessen jährliches Zuwachsprocent 4 Klafter beträgt, ist am Ansang des 10ten Jah-

Jahres nichts mehr übrig. Wie viele Klafter wurden am Anfang eines jeden Jahres geschlagen?

Es ist hier c = 10400, k = 4, und n = 10.

Die Berechnung ist die nemliche, wie bei dem Seite 225 angegebenen Beispiel, also auch das Resultat = 1232,913 Klaftern.

Exempel zur Uibung.

Ein Waldbestand von 473800 Klaftern giebt 2 Klafter jährliches Zuwachsprocent. Wie viele Klafter dürfen zu Anfang eines jeden Jahres geschlagen werden, wenn der Waldbestand am Anfang des 65sten Jahres zu Ende seyn soll? Antwort. 12832.65 Klafter.

Sechstes Beispiel.

Wenn die Größe c des anfänglichen Waldbestandes gesucht wird, dessen jährliches Zuwachsprocent = k ist, und welcher, bei der am Anfang eines jeden Jahres geschlagenen Anzahl von a Klaftern am Anfang des nten Jahres nach der letzten Wegnahme der a Klafter, die Größe q haben soll.

Hier wird nach der Formel der zehnten Aufgabe, zweite Anmerkung, Seite 240 gerechnet.

Siebentes Beispiel.

Wenn die Größe c des anfänglichen Waldbestands gesucht wird, dessen jährliches Zuwachsprocent = k ist, und von welchem, bei der am Anfang eines jeden Jahres geschlagenen Anzahl von

a Klaf-

a Klaftern, am Anfang des nten Jahres, nach der letzten Wegnahme der a Klafter, nichts mehr übrig ist.

Hier wird nach der Formel der zehnten Aufgabe, zweite Anmerkung, Seite 240 gerechnet.

Von einem Waldbestand, dessen jährliches Zuwachsprocent 4 Klafter ist, nimmt man sogleich mit Anfang des ersten Jahres 1233 Klafter weg, und eben so viel am Anfang eines jeden folgenden Jahres, so daß bei dem Anfang des zehnten Jahres, nach der letzten Wegnahme der gedachten Anzahl Klafter, nichts mehr von dem anfänglichen Waldbestand übrig war.

Wie groß war er?

Es ist $a = 1233$, $k = 4$ und $n = 10$.

Uibrigens wird die Rechnung eben so wie bei dem Seite 241 berechneten Zahlenbeispiel geführt, und man erhält auch das nemliche Resultat, nemlich 10400 Klaftern.

Exempel zur Uibung.

Ein gewisser Waldbestand giebt 2 Klafter jährliches Zuwachsprocent. Zu Anfang eines jeden Jahres wurden 12833 Klaftern geschlagen. Bei dem Anfang des 65sten Jahres, war nach der letzten Wegnahme der gedachten Anzahl Klafter von diesem Waldbestand nichts mehr übrig. Wie viele Klafter enthielt der anfängliche Waldbestand? Antwort. Sehr nahe 473800 Klafter.

Eilfter Abschnitt.

Zeitrentenberechnung.

§. 1.

Man nehme an, A. habe ein Capital von 12000 fl. zu 5 Procent an B. ausgeliehen, kann aber mit den jährlichen Zinsen dieses Capitals seine Ausgaben, die jährlich 800 fl. betragen, nicht bestreiten, und kündigt also am Anfang eines jeden Jahres so viel von dem Capital auf, daß diese Summe, die er am Ende des Jahres erhält, nebst dem jährigen Zins des Capitals, den er gleichfalls am Ende dieses Jahres erhält, zusammen 800 fl. beträgt. Man kann nun fragen, nach wie viel Jahren das Capital aufgezehrt ist, und die Berechnung so führen, wie in dem achten Abschnitt, zweite Aufgabe, Seite 189 gezeigt wurde, oder man kann fragen, wie das Capital von Jahr zu Jahr abnimmt, und die Berechnung so führen, wie in dem achten Abschnitt, dritte Aufgabe, erster Fall, Seite 197 gezeigt wurde, u. s. ferner.

§. 2. Dieses Beispiel läßt sich auch auf folgende Art ausdrücken. A. leihet dem B. ein Capital

pital von 12000 fl. mit der Bedingung, daß ihm B. am Ende eines jeden Jahres 800 fl. auszahle. Wird nun gefragt, nach wie viel Jahren das Capital aufgezehrt ist, wie es von Jahr zu Jahr abnimmt, u. s. f. so ist die Berechnung die nemliche, wie bei dem in dem vorigen Paragraphen aufgeführten Beispiele und wird also nach den Formeln des achten Abschnitts angestellt.

§. 3. Diese jährlich von dem Schuldner B. an den Gläubiger A. bezahlte Summe von 800 fl. heißt eine Rente. Unter Rente versteht man nemlich überhaupt eine Geldsumme, die in gleichen Terminen erhoben wird. Das Capital von 12000 fl., welches A. dem B. giebt, um die Rente von 800 fl. zu erhalten, oder überhaupt die Summe Geld, wofür die Rente gekauft wird, heißt die Mise. Der Gläubiger A., welcher die Rente kauft, heißt der Rentenirer, und der Schuldner B., welcher die Rente verkauft, heißt der Entrepreneur oder Rentengeber.

§. 4. Wenn die Termine, in denen die Rente bezahlt werden soll, jährige Termine sind, so heißt die Rente eine Jahresrente oder Annuität, sind sie halbjährige Termine, so heißt die Rente eine Halbjahresrente, sind sie monatliche, eine Monatsrente. Uiberhaupt heißt eine Rente,

die in bestimmten Terminen ausbezahlt wird, eine Zeitrente.

§. 5. Grundcapital, (oder Perpetuity bei den Engländern,) heißt dasjenige Capital, dessen jährlicher Zins = 1 ist. Wenn das Procent mit k und das Grundcapital mit p bezeichnet wird, so verhält sich $k : 100 = 1 : p$. Folglich ist das Grundcapital $p = \frac{100}{k}$, d. h. man findet es, wenn man 100 mit dem Zins von hundert dividiret.

Z. B. wenn $k = 5$ ist, so ist $p = \frac{100}{5}$ oder $= 20$, ist $k = 4$, so ist $p = 25$.

Da nun $p = \frac{100}{k}$, so ist $k = \frac{100}{p}$, ferner $\frac{k}{100} = \frac{1}{p}$ Es zeigt aber $\frac{k}{100}$ den jährlichen Zins des Capitals 1 an, (denn es verhält sich $100 : k = 1 : \frac{k}{100}$), also bedeutet auch $\frac{1}{p}$ den jährlichen Zins des Capitals 1. Folglich ist $1 + \frac{1}{p}$ das Capital 1 nebst dem dazu gerechneten jährlichen Zins, oder eben so viel als $1 + \frac{k}{100}$ oder als $\frac{100 + k}{100}$. Dieser Ausdruck $1 + \frac{1}{p}$ oder $\frac{100 + k}{100}$, der gewöhnlich mit r bezeichnet wird, heißt der jährliche Zinsfuß, und giebt an, wie hoch sich der Werth eines Capitals, welches als Einheit angenommen wird, mit den dazu geschlagenen Zins nach einem Jahr beläuft.

§. 6.

§. 6. Aus dem zweiten Paragraph dieses eilften Abschnitts erhellt, daß die Rentenberechnung nach den Formeln des achten Abschnitts geführt werden kann. Wie nun für jeden Fall zu verfahren ist, wird an den folgenden Beispielen gezeigt werden.

Erstes Beispiel.

Wenn die Anzahl n der Jahre gesucht wird, da die Mise c, zu k Procent gerechnet, durch die am Ende eines jeden Jahres geschehene Auszahlung der Rente a, bis auf den Rest q abgenommen hat.

Hier wird die Formel der ersten Aufgabe, Seite 176 angewendet.

A. kauft von B. mit 25000 fl. zu 5 Procent ein Jahresrente von 2000 fl., nach wie viel Jahren sind von der Mise noch 12500 fl. übrig?

Es ist $c = 25000$, $a = 2000$, $k = 5$ und $q = 12500$.

Die Berechnung ist übrigens die nemliche, wie in dem Beispiel Seite 177, folglich auch das Resultat = 12 Jahren, 154 Tagen.

Exempel zur Uibung.

Eine Rente von 350 fl., welche am Ende eines jeden Jahres ausgezahlt wird, wurde mit einem Capital von 6000 fl. zu 5 Procent gekauft, nach wie viel Jahren ist von dem Capital noch der vierte

Theil übrig? (Hier ist q der vierte Theil von 6000 fl. oder = 1500 fl. Antwort. Nach 34,94 Jahren.

Zweites Beispiel.

Wenn die Anzahl n der Jahre gesucht wird, da die Mise c zu k Procent, durch die am Ende eines jeden Jahres geschehene Auszahlung der Rente a bis auf Null abgenommen hat. Oder wenn gefragt wird, wie viele Jahre kann die mit der Summe c erkaufte Rente a zu Ende eines jeden Jahres ausgezahlet werden, woferne k Procent gerechnet wird?

Hier wird die Formel der zweiten Aufgabe, Seite 189 angewendet.

Wie viele Jahre kann die mit 45000 fl. zu 5 Procent erkaufte Rente von 4000 fl. zu Ende eines jeden Jahres ausgezahlt werden?

Es ist c = 45000, a = 4000, und k = 5. Uibrigens ist die Berechnung die nemliche, wie in dem Seite 189 angeführten Beispiel, folglich auch das Resultat 16 Jahre, 344 Tage.

Exempel zur Uibung.

1) Jemand will für 34580 fl. eine Jahrrente von 2000 fl. kaufen, auf wie lange kann man sie ihm zugestehen, wenn die Zinsen zu 4 Procent gerechnet werden, und die Rente am Ende eines jeden Jahres ausgezahlt werden soll? Auf 29,993 Jahre, wofür man 30 Jahre annehmen kann.

2) Ein

2) Ein Ehepaar zahlt 26 Jahre in eine Wittwenkasse mit Anfang eines jeden Jahres 50 fl., auf wie viele Jahre kann dieſ Wittwe eine Rente von 150 fl. erhalten, die am Ende eines jeden Jahres zahlbar iſt, den jährlichen Zins zu 5 Procent gerechnet?

Zuerſt muß berechnet werden, wie viel die 26 Beiträge, jeder zu 50 fl., am Ende des 26ſten Jahres, zu 5 Procent, werth ſind, das heißt, es muß die Größe des Capitals geſucht werden, welchem die Summe dieſer Beiträge, mit den dazu geschlagenen zuſammengeſetzten Zinſen, am Ende des 26ſten Jahres gleich iſt. Man ſieht nemlich den erſten Beitrag von 50 fl. als ein Capital = c an, zu welchem am Ende eines jeden Jahres, nur am Ende des nten oder 26ſten Jahres nicht, ein Beitrag, der auch = c iſt, gelegt wird, und ſucht den künftigen Werth w, zu welchem auf dieſe Art, das anfängliche Capital c, die zuſammengeſetzten Zinſen desſelben und der Beyträge, zu 5 Procent mitgerechnet, am Ende des nten oder 26ſten Jahres angewachſen iſt, vermittelſt der Formel in der vierten Aufgabe, zweite Anmerkung, Seite 205.

$$w = \frac{\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right](100+k)c}{k}$$

 alſo

$$\text{also hier } w = \frac{\left[\left(\frac{105}{100}\right)^{26} - 1\right]105.50}{5}$$

$$\text{d. i. } w = \left[\left(\frac{105}{100}\right)^{26} - 1\right]1050$$

Nach gehöriger Rechnung findet man w = 2683,464 fl. Nun betrachte man dieses w, welches der Rentengeber besitzt, als eine Mise = c, zu 5 Procent, für die Rente a von 150 fl., und suche wie in dem ersten Exempel die Anzahl Jahre, während welcher die Rente am Ende eines jeden Jahres ausbezahlt werden kann, nach der Formel Seite 189, so findet man n = 46 Jahren.

3) Jemand kauft für 34580 fl. eine Vierteljahrrente von 500 fl., wie viele Jahre kann sie laufen, wenn der vierteljährige Zins zu 1 Procent gerechnet wird, und die Rente am Ende eines jeden Vierteljahres ausgezahlt werden soll?

Es ist c = 34580, a = 500, k = 1. Rechnet man nun nach der Formel, Seite 189, so findet man n = 118,22. Es ist aber zu bemerken, daß n eigentlich die Anzahl Termine bedeutet, in welchen die Rente bezahlt wird, folglich bedeutet bei Jahrrenten die Zahl n die Anzahl Jahre, bei Halbjahrrenten die Anzahl Halbjahre, bei Vierteljahrrenten, die Anzahl Vierteljahre, während welcher die Rente läuft. Da nun hier von einer Vierteljahrente die

Rede

Rede ist, so bedeutet das berechnete n nichts anders als 118,22 Vierteljahre, welche Zahl, mit 4 dividirt, 29,55 Jahre giebt, während welcher die Rente bezahlt werden kann.

Drittes Beispiel.

Wenn der Rest q gesucht wird, der von der Mise c zu k Procent nach n Jahren übrig ist, da zu Ende eines jeden Jahres die Rente a ausgezahlt wurde. Oder wenn gefragt wird, wie viel der Rentenirer A., der für die Mise c zu k Procent sich von dem Entrepreneur B. die Rente a gekauft, und solche n Jahre lang mit Ende eines jeden Jahres bezogen hat, von dem C., welchem er sie verkauft, zu erhalten hat.

Hier wird die Formel in der dritten Aufgabe, Seite 197 angewendet.

Jemand kaufte mit 12000 fl. zu 5 Procent eine Jahresrente von 800 fl., und erhielt solche 14 Jahre mit Ende eines jeden Jahres. Wie viel ist von der Mise noch übrig?

Es ist $c = 12000$, $a = 800$, $k = 5$ und $n = 14$. Die Berechnung ist übrigens die nemliche, wie in dem, Seite 198 ausgeführten Beispiel; folglich auch das Resultat $= 8080,276$ fl.

Exempel zur Uibung.

Jemand hat für 34580 fl. zu 4 Procent eine Rente von 2000 fl. gekauft, und solche 18 Jahre

mit

mit Ende eines jeden Jahres bezogen, er will sie nun verkaufen, wie viel wird er dafür erhalten? Antwort. Sehr nahe 18762 fl.

Erste Anmerkung.

Wenn die Rente a am Ende jedes mten Theils des Jahres bezahlt werden soll, das Procent für diesen Theil des Jahres zu b Geldstücken bestimmt wurde, und man sucht den Rest q, so ist zu bemerken, daß diese Rente in einem Jahr mmal ausbezahlt wird, folglich in n Jahren mnmal. In der Formel, Seite 197, bedeutet für eine Jahrrente der Buchstabe k das jährliche Procent, und n die Anzahl der Jahre, oder eigentlich der jährlichen Termine. Für den gegenwärtigen Fall muß also statt k das mteljährige Procent b, und statt der Anzahl n der jährlichen Termine, die Anzahl mn der mteljährigen Termine gesetzt werden, diese veränderte Formel ist

$$\frac{100a - \left(\frac{100+b}{100}\right)^{mn}(100a - cb)}{b} = q$$

und a bedeutet in ihr die mteljährige Rente.

Zweite Anmerkung.

Wenn das mteljährige Procent u aus dem gegebenen oder vestgesetzten jährigen k nach Seite 288 u. 289 so bestimmt wird, daß da $\frac{100+u}{100}$ nach einem Jahr, oder

nach

nach m Terminen, mit den zusammengesetzten Zinsen auf $\left(\frac{100+u}{100}\right)^m$ anwächst, nach Seite 156) dieser Werth, dem Werth $\frac{100+k}{100}$, zu welchem das Capital 1 nach einem Jahr zu k Procent angewachsen ist, gleich seyn soll, so ist $\left(\frac{100+u}{100}\right)^{mn} = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n$, also wird die Formel für den Rest q, welchen die mteljährige Rente a nach n Jahren giebt, wenn das mteljährige Procent = u ist, aus der in der ersten Anmerkung angegebenen so hergeleitet, daß man u statt b und $\left(\frac{100+k}{100}\right)^n$ statt $\left(\frac{100+b}{100}\right)^{mn}$ oder statt $\left(\frac{100+u}{100}\right)^{mn}$ setzt, die Formel ist sodann

$$\frac{100a - \left(\frac{100+k}{100}\right)^n (100a - cu)}{u} = q.$$

Viertes Beispiel.

Wenn die am Ende eines jeden Jahres auszuzahlende Rente a gesucht wird, welche für die Mise c zu k Procent auf n Jahre gekauft wurde.

Hier wird die Formel in der siebenten Aufgabe, Seite 219 angewendet.

Mit 100000 fl. zu 5 Procent wird eine am Ende eines jeden Jahres fällige Rente auf 37 Jahre gekauft. Wie groß ist diese Rente?

Es ist c = 100000, k = 5 und n = 37. Die Berechnung ist die nemliche, wie in dem Seite 220 ange-

angegebenen Beispiel. Also auch das Resultat 5984 fl. sehr nahe.

Exempel zur Uibung.

1) Wie groß ist die am Ende eines jeden Jahres zu bezahlende Rente, wenn der 13jährige Genuß derselben einem baaren Capital von 20000 fl. gleich geachtet werden soll, die Zinsen zu 4 Procent gerechnet? Antw. 2002,88 fl. oder beinahe 2003 fl.

2) Jemand kauft eine Jahrrente mit 4000 fl. zu 3 Procent auf 12 Jahre, wie viel kann ihm am Ende eines jeden Jahres ausgezahlt werden? Antwort. 401,849 fl. oder beinahe 402 fl.

3) Ein Ehepaar zahlt 20 Jahre lang in eine Wittwenkasse mit Anfang eines jeden Jahres 25 fl. Wie groß ist die Rente, welche die Wittwe 12 Jahre lang, zu Ende eines jeden Jahres erhalten kann, wenn die Zinsen zu 5 Procent gerechnet werden? (Zuerst wird berechnet, wie viel die 20 Beiträge, jeder zu 25 fl. am Ende des 20sten Jahres werth sind, wenn man die Zinsen zu 5 Procent rechnet. Diese Berechnung wird, wie im zweiten Beispiel, N. 2, Seite 279 nach der Formel in der vierten Aufgabe, zweite Anmerkung, Seite 205 geführt. Man findet diesen Werth sehr nahe = 868 fl., und betrachtet ihn als eine Mise = c zu 5 Procent für eine Rente, die 12 Jahre lang am Ende eines je-

den Jahres bezahlt wird. Hieranf suche man diese Rente.) Antw. 97,93 fl. oder beinahe 98 fl.

Erste Anmerkung.

Wenn bei zwei Renten a und A, die Capitalien oder Misen c und C sind, die andern Stücke aber, nemlich das Procent k und die Anzahl der Jahre n gleich sind, so verhalten sich die beiden Renten wie ihre Misen, das heißt, es verhält sich $c : C = a : A$. Denn wenn man in der Formel, Seite 219 statt $\frac{100+k}{100}$ den Buchstaben r setzt, so ist

$$a = \frac{r^n c k}{100(r^n - 1)} \text{ und } A = \frac{r^n C k}{100(1^n - 1)}$$

folglich verhält sich

$$\frac{r^n c k}{100(r^n - 1)} : \frac{r^n C k}{100(r^n - 1)} = a : A$$

und wenn man die beiden Glieder des ersten Verhältnisses mit dem gemeinschäftlichen $\frac{r^n k}{100(r^n - 1)}$ hebt, so verhält sich $c : C = a : A$.

Hat man also eine berechnete Tabelle, in welcher für mehrere n und k die zugehörigen c und a angegeben sind, so kann man vermittelst den in der Tabelle befindlichen Werthen von c und a für n und k, und der gegebenen Mise C, den zu ihr gehörigen Werth der Rente A, gleichfalls für n und k, durch die Regel de Tri finden.

Z. B. Wenn nach der gedachten Tabelle die Mise von 1038 fl. zu 5 Procent, eine Rente von 100 fl. auf 15 Jahre giebt, wie groß ist die Rente, welche einer Mise von 1519 fl. gleichfalls zu 5 Procent, auf 15 Jahre entspricht?

$$1038 : 1519 = 100 : A$$

Also ist die gesuchte Rente A = 146 fl. 20 Kr.

Zweite Anmerkung.

Wenn ausgemacht worden ist, daß die Rente am Ende eines jeden mten Theils des Jahres bezahlt werden soll, und das Procent für diesen Theil des Jahres zu b Geldstücken bestimmt worden ist, und man sucht die Rente a, oder wie viel während n Jahre, am Ende eines jeden mten Theil des Jahres ausbezahlt werden muß, so ist vorher anzugeben, wie viele Termine die Rente läuft. Nun wird sie in einem Jahr mmal ausbezahlt, also in n Jahren mnmal. In der Formel der siebenten Aufgabe, Seite 219,

$$n[\log.(100+k) - \log.100] + \log.c + \log.k - \log.\left(100\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right]\right) = \log.a$$

bedeutet, wenn sie zur Berechnung einer Jahresrente gebraucht wird, n die Anzahl der Jahre, und k das jährliche Procent. Es ist aber klar, daß n eigentlich die Anzahl der jährlichen Termine bedeutet, in welchen die Rente ausbezahlt

wird.

wird. Wenn man also diese Formel auf gegenwärtigen Fall anwendet, so muß in ihr statt k das mteljährige Procent b, und statt n die Anzahl mn der mteljährigen Termine substituirt werden, sodann ist die Formel für diesen Fall

$$mn[\log.(100+b)-\log.100]+\log.c+\log.b- \log\left(100\left[\left(\frac{100+b}{100}\right)^{mn}-1\right]\right)=\log.a,$$

und a bedeutet hier die Größe der mteljährigen Rente.

Z. B. Mit 100000 fl. wird eine am Ende eines jeden Vierteljahres fällige Rente a auf 37 Jahre gekauft, wie groß ist diese Rente, wenn das vierteljährige Procent zu $1\frac{1}{4}$ fl. gerechnet wird?

Hier ist $\frac{1}{m}=\frac{1}{4}$ Jahr, also $m=4$, $b=1\frac{1}{4}$ und $n=37$. Uibrigens ist $c=100000$. Ferner ist $mn=4.37=148$, also die Formel

$$148[\log.101\tfrac{1}{4}-\log.100]+\log.100000+\log.1\tfrac{1}{4}- \log.\left(100\left[\left(\frac{101\frac{1}{4}}{100}\right)^{148}-1\right]\right)=\log.a$$

Wenn man nach ihr gehörig rechnet, so findet man $a=1486{,}076$. Also müssen 1486 fl. am Ende eines jeden Vierteljahres ausbezahlet werden.

Exempel zur Uibung.

1) Jemand kauft mit 20000 fl. eine Vierteljahrrente auf $22\frac{1}{2}$ Jahre. Wie viel muß ihm am Ende eines jeden Vierteljahres entrichtet werden, wenn

wenn das vierteljährige Procent zu $1\frac{1}{4}$ gerechnet wird? Antwort. 371,43 fl.

2) Ein anderer kauft mit 20000 fl. eine Halbjahrrente, auf $22\frac{1}{2}$ Jahr. Wie viel muß ihm am Ende eines jeden Halbenjahres entrichtet werden, wenn das halbjährige Procent zu $2\frac{1}{2}$ gerechnet wird? Antwort. 745,349 oder 745 fl. 21 Kr.

Dritte Anmerkung.

Es kann auch der Fall statt finden, daß jemand sich mit der Mise c, zu k Procent, eine Jahrrente a gekauft hat, mit der Bedingung, daß ihm solche am Ende eines jeden Jahres ausgezahlt werde. Wenn er nun den Vorschlag macht, ihm die Rente in vierteljährigen Terminen, das heißt: am Ende eines jeden Vierteljahres einen Theil derselben zu entrichten, so ist die Frage, wie viel er in jedem vierteljährigen Termin erhalten wird. Hier darf nicht wie in der vorigen Anmerkung gerechnet werden. Denn wenn bei der neuen Einrichtung der Rentengeber nichts verlieren soll, so muß darauf Rücksicht genommen werden, daß drei von den Vierteljahrprocenten in jedem Jahr zu früh bezahlt werden. Nemlich, wenn jährlich 5 Procent gerechnet wird, so ist zwar der vierte Theil davon $1\frac{1}{4}$, aber da dieses $1\frac{1}{4}$, wenn man es zu Ende des ersten Vierteljahrs bezahlt, um $\frac{3}{4}$ Jahr zu früh entrichtet wird, weil

nach

nach dem Vertrag die Rente eigentlich erst am Ende des Jahres bezahlt werden soll, so muß discontiret werden. Man sehe also dieses Vierteljahrprocent als unbekannt an, und bezeichne es mit u, so ist das Capital 1 nach einem Vierteljahr auf $\frac{100+u}{100}$ angewachsen. Rechnet man nun mit zusammengesetzten Zinsen, so ist das nemliche Capital 1 nach vier Vierteljahren, oder nach einem Jahr auf $\left(\frac{100+u}{100}\right)^4$ angewachsen, nach Seite 156. Zu k jährlichen Procent, ist aber dieses Capital 1 nach einem Jahr auf $\frac{100+k}{100}$ angewachsen. Soll nun der Rentengeber keinen Schaden leiden, so muß $\left(\frac{100+u}{100}\right)^4 = \frac{100+k}{100}$ seyn. Oder überhaupt, wenn die Rente z in einem Jahr mmal ausbezahlt werden soll, das heißt am Ende jedes mten Theil des Jahres, so muß $\left(\frac{100+u}{100}\right)^m = \frac{100+k}{100}$ seyn, alsdann hat der Rentengeber bei mmaliger Austheilung der Rente z während eines Jahres, am Ende des Jahres eben so viel von der Mise übrig, als bei der einmaligen Austheilung der Rente a am Ende dieses Jahres. Da nun $\left(\frac{100+u}{100}\right)^m = \frac{100+k}{100}$ ist, so ist $\frac{100+u}{100} = \sqrt[m]{\frac{100+k}{100}}$, ferner $100+u = 100\sqrt[m]{\frac{100+k}{100}}$, und

$$u = 100\sqrt[m]{\left(\frac{100+k}{100}\right)} - 100, \text{ oder}$$

$u = 100\left[\left(\sqrt[m]{\frac{100+k}{100}}\right) - 1\right]$. Hat man vermittelst dieser Gleichung u berechnet, so kann man die mteljährige Rente z finden, wenn man in der Gleichung der vorigen Anmerkung

$$mn\,[\log.\,(100+b) - \log.\,100] + \log.\,c + \log.\,b - \log.\left(100\left[\left(\frac{100+b}{100}\right)^{mn} - 1\right]\right) = \log.\,a$$

statt b den berechneten Werth u substituirt. Dann hat man

$$mn\,[\log.\,(100+u) - \log.\,100] + \log.\,c + \log.\,u - \log.\left(100\left[\left(\frac{100+u}{100}\right)^{mn} - 1\right]\right) = \log.\,z.$$

Da aber $\left(\frac{100+u}{100}\right)^m = \frac{100+k}{100}$ ist, so ist

$$\left(\frac{100+u}{100}\right)^{mn} = \left(\frac{100+k}{100}\right)^n$$

also kann diese Formel einfacher so dargestellt werden:

$$n\,[\log.\,(100+k) - \log.\,100] + \log.\,c + \log.\,u - \log.\left(100\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right]\right) = \log.\,z$$

Z. B. Jemand hat mit 100000 fl. zu 5 jährlichen Procent auf 37 Jahre eine Jahrrente gekauft, und würde nach der gemachten Berechnung, am Ende eines jeden Jahres 5984 fl. erhalten. Nun wünscht er aber, daß diese Jahrrente in eine Vierteljahrrente möchte verwandelt werden, so daß er am Ende eines jeden Vierteljahrs, während der 37 Jahre, eine gleiche Summe z erhielte. Wie groß ist z?

Hier

Hier ist $c = 100000$, $n = 37$, $k = 5$ und $m = 4$. Also ist

$u = 100\left[\left(\sqrt[4]{\frac{105}{100}}\right) - 1\right]$. Der Ausdruck $\sqrt[4]{\frac{105}{100}}$ wird vermittelst der Logarithmen berechnet. Es ist nemlich $\log. \sqrt[4]{\frac{105}{100}} = \frac{\log. 105 - \log. 100}{4}$.

Nun ist $\log. 105 = 2{,}0211893$
$\log. 100 = 2$

also $\log. 105 - \log. 100 = 0{,}0211893$

folglich $\frac{0{,}0211898}{4} = 0{,}0052973$

Die zu diesem Logarithmus gehörige Zahl, oder $\sqrt[4]{\frac{105}{100}}$ ist =

1,012272
davon ab 1

0,012272
multiplicirt mit 100

so ist u = 1,227200

Substituirt man hierauf, in der vorhin für z angegebenen Formel, die gehörigen Zahlenwerthe der Ausdrücke c, n, k, und u, so ist

$$37\,[\log. 105 - \log. 100] + \log. 100000 + \log. 1{,}2272 - \log. \left(100\left[\left(\frac{105}{100}\right)^{37} - 1\right]\right) = \log. z$$

Es ist aber $\log. 105 - \log. 100 = 0{,}0211893$ und diesen Rest mit 37 multiplicirt, giebt das Product

 0,7840041

0,7840041, zu welchem die Zahl 6,081407 $= \left(\frac{105}{100}\right)^{37}$ gehört.

Auch ist log. 1,2272 = 0,0889153. Führt man nun die Berechnung nach der Formel vollends hinaus, so findet man z = 1468,707.

Exempel zur Uibung.

Jemand hat mit 20000 fl. zu 5jährlichem Procent auf $22\frac{1}{2}$ Jahre eine Jahrrente von 1500 fl. gekauft, nach geschlossenem Kauf aber trägt er darauf an, daß sie in eine Vierteljahrrente möchte verwandelt, und am Ende eines jeden Vierteljahrs ausgezahlt werden. Wie groß ist diese Vierteljahrrente? Antw. 368,3145 fl.

Vierte Anmerkung.

Man kann auch die Größe der mteljährigen Rente z, die n Jahre laufen soll, unmittelbar aus der bekannten Jahresrente a, die gleichfalls n Jahre lang laufen soll, und aus dem jährlichen Procent k finden. Denn nach der siebenten Aufgabe des achten Abschnitts, Seite 219 ist

$$\frac{\left(\frac{100+k}{100}\right)^n k c}{100\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right]} = a$$

folg-

folglich ist, nach dem, was in der dritten Anmerkung gezeigt wurde, wenn man nemlich u statt k und mn statt n substituiret:

$$\frac{\left(\frac{100+u}{100}\right)^{mn} uc}{100\left[\left(\frac{100+u}{100}\right)^{mn}-1\right]}=z$$

Es ist aber $\left(\frac{100+u}{100}\right)^m=\frac{100+k}{100}$, (nach der dritten Anmerkung,) also $\left(\frac{100+u}{100}\right)^{mn}=\left(\frac{100+k}{100}\right)^n$. Man setze, der Bequemlichkeit der Rechnung wegen, $\frac{100+k}{100}=r$, so ist

$$\frac{r^n kc}{100(r^n-1)}=a \text{ und } \frac{r^n uc}{100(r^n-1)}=z$$

Man drücke z als einen gewissen Theil = g der Rente a aus, oder man nehme an, es sey z = ga, so ist $\frac{r^n uc}{100(r^n-1)}=ga$, folglich $\frac{r^n uc}{100g(r^n-1)}=a$, also $\frac{r^n kc}{100(r^n-1)}=\frac{r^n uc}{100g(r^n-1)}$ und wenn man die beiden Seiten dieser Gleichung mit $\frac{r^n c}{100(r^n-1)}$ dividiret, so ist $k=\frac{u}{g}$, daher $g=\frac{u}{k}$, und ag oder $z=\frac{au}{k}$. Es ist aber nach der dritten Anmerkung, $u=100\left[\left(\sqrt[m]{\frac{100+k}{100}}\right)-1\right]$, folglich ist

$$z = \frac{100a\left[\left(\sqrt[m]{\frac{100+k}{100}}\right)-1\right]}{k}$$

Z. B. Jemand hat, zu 5 jährlichen Procent, eine Jahrrente von 5984 fl. gekauft, die am Ende eines jeden Jahres bezahlt werden sollte, er verlangt aber, daß sie in eine Vierteljahrrente verwandelt werde, wie viel kann ihm am Ende eines jeden Vierteljahres ausgezahlt werden?

Hier ist $a = 5984$, $k = 5$, und $m = 4$. Also

$$z = \frac{100.5984\left[\left(\sqrt[4]{\frac{105}{100}}\right)-1\right]}{5}$$

Der Ausdruck $\sqrt[4]{\frac{105}{100}}$ wird logarithmisch berechnet. Es ist nemlich log. $\sqrt[4]{\frac{105}{100}} =$ $\frac{\text{log. } 105 - \text{log. } 100}{4} = \frac{0{,}0211893}{4}$, d. i. $= 0{,}0052973$. Die zu diesem Logarithmus gehörige Zahl, oder $\sqrt[4]{\frac{105}{100}}$ ist $= 1{,}012272$, also ist $\left(\sqrt[4]{\frac{105}{100}}\right) - 1 = 0{,}012272$.

Folglich $\frac{100.5984.0{,}012272}{5} = z$

Nun ist $0{,}012272 . 598400 = 7343{,}5648$, und dieses Product mit 5 dividiret, giebt $1468{,}7129 = z$.

Exempel zur Uibung.

1) Jemand hat, zu 5 jährlichen Procent, eine Jahrrente von 1500 fl. gekauft, die am Ende eines jeden

jeden Jahres zu bezahlen ist, nach geschlossenem Kauf trägt er aber darauf an, daß sie in eine Vierteljahrrente verwandelt werde, die eben so viele Jahre laufen soll als die Jahrrente, wie viel kann ihm am Ende eines jeden Vierteljahrs ausbezahlt werden? Antw. 368,16 fl.

2) Wenn eben diese Jahrrente von 1500 fl., zu 5 jährlichen Procent, in eine Halbjahrrente sollte verwandelt werden, wie viel muß am Ende eines jeden halben Jahres entrichtet werden? (Hier ist $m = 2$) Antw. 740,85 fl.

Fünftes Beispiel.

Wenn die Mise c gesucht wird, für welche zu k Procent, die mit Ende eines jeden Jahres ausgezahlte Rente a auf n Jahre gekauft wurde, oder wenn gefragt wird, wie der baare Werth c der Rente a ist, die n Jahre lang läuft, und zu Ende eines jeden Jahres entrichtet wird.

Hier wird nach der Formel in der zehnten Aufgabe, Seite 236 gerechnet.

Wie groß ist der baare Werth einer Jahrrente von 5984 fl. gerechnet, welche auf 37 Jahre gekauft wurde, und mit Ende eines jeden Jahres zahlbar ist, den jährlichen Zins zu 5 Procent gerechnet.

Es ist $a = 5984$, $k = 5$, $n = 37$.

Die Berechnung ist eben so, wie bei dem Seite 236 angegebenen Zahlenbeispiel, also ist auch das Resultat = 100000 fl.

Exempel zur Uibung.

1) Jemand, der 6 Jahre lang eine Rente von 500 fl. am Ende eines jeden Jahres zu beziehen hat, will solche verkaufen, wie viel kann man ihm dafür baar geben, die jährlichen Zinsen zu 3½ Procent gerechnet? Antwort. 2664 fl. 12 Kr. sehr nahe.

2) Wie viel beträgt der baare Werth einer auf 8 Jahre angewiesenen Jahrrente von 350 fl., die jährlichen Zinsen zu 4 Procent gerechnet? Antwort. 2356 fl. 27 Kr.

3) Jemand will eine Jahrrente von 400 fl., die er 12 Jahre lang, am Ende eines jeden Jahres beziehen kann, kaufen, wie viel muß er dafür baar bezahlen, oder wie groß ist seine Mise, die Zinsen zu 3 Procent gerechnet. Antwort. Etwas über 3981 fl. 35 Kr.

4) Jemand hat auf 30 Jahre eine Jahrrente von 2000 fl. gekauft, und solche 18 Jahre lang, mit Ende eines jeden Jahres bezogen. Er will sie nun verkaufen, wie viel wird er dafür erhalten, wenn die Zinsen zu 4 Procent angeschlagen werden. (Dieses Exempel kann auf folgende Art berechnet wer-

werden. Man subtrahirt 18 von 30, und sucht den baaren Werth der Jahrrente von 2000 fl., die 12 Jahre lang läuft.) Antwort. 18770 fl. sehr nahe.

Anmerkung.

Wenn man den baaren Werth oder die Mise c einer mteljährigen Rente, welche n Jahre lang, am Ende jedes mten Theils des Jahres, ausgezahlt wird, sucht, so substituire man in der Formel der zehnten Aufgabe, Seite 236, mn statt n, das mteljährige Procent b statt dem Jahresprocent k, und berechne nach dieser Formel den Werth von c. Nemlich die Formel ist

$$\log.\left(100\left[\left(\frac{100+b}{100}\right)^{mn}-1\right]\right)+\log. a -$$
$$(mn[\log.(100+b)-\log. 100]+\log. b)=\log. c$$

Der Buchstabe a bedeutet hier die mteljährige Rente.

Wird aber aus dem vestgesetzten jährlichen Procent k das mteljährige u bestimmt, so daß $\left(\frac{100+u}{100}\right)^{m}=\frac{100+k}{100}$, folglich $\left(\frac{100+u}{100}\right)^{mn}=$ $\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n}$ ist, so ist nach dem, was in der dritten Anmerkung des vierten Beispiels, Seite 290, gezeigt wurde:

log.

$$\log.\left(100\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right]\right) + a -$$

$$(n[\log.(100+k) - \log. 100] + \log. u) = \log. c.$$

Der Buchstabe a bedeutet hier die mteljährige Rente.

§. 7. Eine Rente, welche zu Anfang eines jeden Termins ausgezahlt wird, heißt eine vorschußliche Rente.

Erstes Beispiel.

Wenn die Anzahl n der Jahre gesucht wird, da die Mise c zu k Procent gerechnet, durch die am Anfang eines jeden Jahres geschehene Auszahlung der Rente a, bis auf den Rest q abgenommen hat.

Hier wird die in der zweiten Aufgabe, zweite Anmerkung, Seite 194, auf der letzten Zeile angegebene Formel gebraucht.

Zweites Beispiel.

Wenn die Anzahl n der Jahre gesucht wird, da die Mise c zu k Procent, durch die am Anfang eines jeden Jahres geschehene Auszahlung der Rente a, bis auf Null abgenommen hat. Oder wenn gefragt wird, wie viele Jahre kann eine mit der Summe c erkaufte Rente a am Anfang eines jeden Jahres ausgezahlt werden, wenn man k Procent rechnet?

Hier wird nach der Formel der zweiten Aufgabe, zweite Anmerkung, Seite 195 gerechnet.

Wie viele Jahre kann die mit 10400 fl. zu 4 Procent erkaufte Jahresrente von 1233 fl. am Anfang eines ieden Jahres ausgezahlt werden?

Es ist $a = 1233$, $k = 4$, $c = 10400$, also $c - a$ oder $C = 9167$.

Uibrigens ist die Berechnung einerlei mit der, welche für ein ähnliches Beispiel, Seite 196 ausgeführt wurde, folglich auch das Resultat = 10 Jahren.

Exempel zur Uibung.

Jemand will für 34580 fl. eine vorschußliche Jahrrente von 2000 fl. kaufen, auf wie lange kann man sie ihm zugestehen, wenn die Zinsen zu 4 Procent berechnet werden? Antwort. Auf 27,88 Jahre.

Drittes Beispiel.

Wenn der Rest q gesucht wird, der von der Mise c am Anfang des nten Jahres übrig ist, da am Anfang eines jeden Jahres die Rente a ausgezahlt wurde, den jährlichen Zins zu k Procent gerechnet. Oder, wenn gefragt wird, wie viel der Rentenirer A., der von dem Rentengeber B. mit der Mise c die vorschußliche Jahrrente a gekauft, und für n Jahre bezogen hat, von dem C., welchem er sie verkauft, zu erhalten hat?

Hier wird nach der Formel in der dritten Aufgabe, zweite Anmerkung, Seite 202 gerechnet.

Je-

Jemand kaufte mit 10400 fl. zu 4 Procent eine vorschußliche Jahresrente von 1233 fl., und bezog solche 9mal, wie viel ist von der Mise am Anfang des neunten Jahres noch übrig?

Es ist $c = 10400$, $k = 4$, $a = 1233$ und $n = 9$. Also $c - a$ oder $C = 9167$, und $n - 1 = 8$.

Uibrigens ist die Berechnung einerlei mit der, welche für ein ähnliches Beispiel, Seite 202 und 203 ausgeführt wurde, folglich auch das Resultat = 1184,55 fl.

Exempel zur Uibung.

Jemand hat für 34580 fl. zu 4 Procent eine vorschußliche Jahrrente von 2000 fl. gekauft, und solche für 18 Jahre bezogen. Nun will er sie verkaufen, wie viel wird er dafür erhalten? Antw. 16067 fl. 38 Kr.

Viertes Beispiel.

Wenn die vorschußliche Jahrrente a gesucht wird, welche mit der Mise c zu k Procent auf n Jahre gekauft wurde.

Hier wird die Formel der siebenten Aufgabe, zweite Anmerkung, Seite 224 angewendet.

Mit 10400 fl. zu 4 Procent wird eine vorschußliche Jahrrente auf 10 Jahre gekauft. Wie groß ist diese Rente?

Es ist $c = 10400$, $k = 4$ und $n = 10$.

Die

Die Berechnung ist die nemliche, wie bei dem Seite 225 angegebenen Beispiel, also auch das Resultat = 1232,913 fl.

Exempel zur Uibung.

Wie groß ist die vorschußliche Jahresrente, wenn der 28jährige Genuß derselben einem baaren Capitel von 34580 fl. gleich geachtet werden soll, und die Zinsen zu 4 Procent gerechnet werden? Antwort. 1995,434 fl.

Fünftes Beispiel.

Wenn der Werth der Mise c gesucht wird, für welche zu k Procent die vorschußliche Jahrrente a auf n Jahre gekauft wurde. Oder, wenn man fragt, wie groß der baare Werth c der vorschußlichen Jahrrente a ist, welche n Jahre läuft, den Zins zu k Procent gerechnet?

Hier wird die Formel der zehnten Aufgabe, zweite Anmerkung, Seite 240 angewendet. Nemlich

$$\log. c = \log. \left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}(100+k) - 100\right] + \lg. a - \left[(n-1)(\log.(100+k) - \log. 100) + \log. k\right]$$

Wie viel beträgt der baare Werth einer vorschußlichen Jahrrente von 1233 fl., welche auf zehn Jahre gekauft wurde. Den jährlichen Zins zu 4 Procent gerechnet?

Es ist a = 1233, k = 4 und n = 10.

Die

Die Berechnung ist die nemliche, wie in dem Seite 241 ausgeführten Zahlenbeispiel, also auch das Resultat = 10400 fl.

Ist die Mise e einer Jahrrente, die n Jahre läuft, und zu Ende eines jeden Jahres zahlbar ist, schon bekannt, so kann man daraus die Mise c einer vorschußlichen Jahrrente auf eben so viele Jahre, und bei dem nemlichen Procent k, sehr leicht finden, wenn man die Mise e mit $\frac{100+k}{100}$ multiplicirt, oder es ist $c = \frac{100+k}{100} e$, wie die Vergleichung der Formeln Seite 236 und 240 zeigt

Denn es ist, nach Seite 240, wo c die Mise der vorschußlichen Jahrrente a bedeutet,

$$\log. c = \log. \left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}(100+k) - 100\right] + \log. a$$
$$- \left[(n-1)(\log. (100+k) - \log. 100) + \log. k\right]$$

daraus folgt $c = \frac{\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}(100+k) - 100\right]a}{k\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}}$

Nun ist aber $\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}(100+k)$

$$= \frac{(100+k)^{n-1}}{100^{n-1}}(100+k)$$

oder $= \frac{(100+k)^n}{100^{n-1}}$ d. i. $= \frac{(100+k)^n}{100^n} 100$

also $= \left(\frac{100+k}{100}\right)^n 100$

folg-

folglich $\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}(100+k) - 100$

$$= \left(\frac{100+k}{100}\right)^{n} 100 - 100$$

$$\text{oder} = \left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n} - 1\right]100$$

$$\text{also } c = \frac{\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n} - 1\right]100a}{k\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}}$$

$$\text{folglich } \frac{c}{\frac{100+k}{100}} = \frac{\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n} - 1\right]100a}{k\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n-1}\frac{100+k}{100}}$$

$$\text{d. i. } \frac{c}{\frac{100+k}{100}} = \frac{\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n} - 1\right]100a}{k\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n}}$$

Aber nach Seite 236, wo c die Mise e der am Ende eines jeden Jahres zahlbaren Rente a bedeutet, ist

$$\log. e = \log.\left(100\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n} - 1\right]\right) + \log. a$$
$$- [n(\log.(100+k) - \log. 100) + \log. k]$$

$$\text{also auch } e = \frac{\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n} - 1\right]100a}{k\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n}}$$

folg-

folglich ist $\frac{\frac{c}{100+k}}{100} = e$

daher $c = \frac{100+k}{100} e$.

Exempel zur Uibung.

Jemand will eine vorschußliche Jahrrente von 2000 fl. auf 18 Jahre kaufen, wie viel muß er dafür bezahlen, oder wie groß ist die Mise, den jährlichen Zins zu 4 Procent gerechnet?

Antwort. 34659,11 fl.

Anmerkung.

Wenn eine mteljährige Rente a vorschußlich, d. h. am Anfang eines jeden mten Theils des Jahres bezahlt werden soll, und man sucht ihren baaren Werth, oder die Mise G, wenn diese Rente zu b mtel jährlichem Procent, n Jahre laufen soll, so daß mit dem Anfang des letzten mteljährigen Termins in dem nten Jahr, nach zum letztenmal ausgezahlter mteljährigen Rente a, nichts mehr von der Mise G vorhanden ist, so kann diese Mise G der vorschußlichen mteljährigen Rente a, aus der Mise M der gewöhnlichen mteljährigen Rente a, die auch zu b mteljährigen Procent n Jahre lang läuft, eben so abgeleitet werden, wie die Mise c einer vorschußlichen Jahresrente, aus der Mise e einer gewöhnlichen Jahresrente. Es ist nemlich (nach

Seite

Seite 304) $c = \frac{100+k}{100} e$. Auf ähnliche Art ist $G = \frac{100+b}{100} M$, in welcher Formel b das mteljährige Procent bedeutet.

Es ist aber, nach Seite 297

$$\log. M = \log. \left(100\left[\left(\frac{100+b}{100}\right)^{mn} - 1\right]\right) + \log. a$$
$$- (mn [\log. (100+b) - \log. 100] + \log. b)$$

$$\text{Daher } M = \frac{100\left[\left(\frac{100+b}{100}\right)^{mn} - 1\right]a}{b\left(\frac{100+b}{100}\right)^{mn}}$$

Folglich

$$\frac{100+b}{100} M \text{ oder } G = \frac{(100+b)\left[\left(\frac{100+b}{100}\right)^{mn} - 1\right]a}{b\left(\frac{100+b}{100}\right)^{mn}}$$

$$\text{und } \log. G = \log. \left((100+b)\left[\left(\frac{100+b}{100}\right)^{mn} - 1\right]\right) +$$
$$\log. a - (mn [\log. (100+b) - \log. 100] + \log. b)$$

Will man aus der Mise G, dem mteljährigen Procent b und der Anzahl der Jahre n, die Größe der mteljährigen vorschußlichen Rente a finden, so folgt sogleich aus der eben hergeleiteten Formel

$$\log. G + mn [\log. (100+b) - \log. 100] + \log. b -$$
$$\log. \left((100+b)\left[\left(\frac{100+b}{100}\right)^{mn} - 1\right]\right) = \log. a$$

Wenn der jährliche Zins zu k Procent festgesetzt ist, und es bedeutet u das mteljährige Procent, so

daß $\left(\frac{100+u}{100}\right)^m = \frac{100+k}{100}$ ist, so ist $\left(\frac{100+u}{100}\right)^{mn}$ $= \left(\frac{100+k}{100}\right)^n$ und $mn\,(\log.(100+u) - \log.100) = n\,[\log.(100+k) - \log.100]$. Substituirt man also in den beiden vorigen Formeln u statt b, und nimmt auf das Ebengesagte Rücksicht, so ist Nr. 1)

$$\log.\ G = \log.\left((100+u)\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right]\right) + \lg.a - (n[\log.(100+k) - \log.100] + \log.u)$$

und Nr. 2)

$$\log.a = \log.G + n[\log.(100+k) - \log.100] + \log.u - \log.\left((100+u)\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right]\right)$$

Hiebei ist zu bemerken, daß da $\left(\frac{100+u}{100}\right)^m = \frac{100+k}{100}$ seyn, das heißt das mteljährige Procent u aus dem jährlichen k so bestimmt werden soll, daß das Capital 1 nach einem Jahr, mit den dazugerechneten mteljährigen zusammengesetzten Zinsen eben so hoch anwächst, als das nemliche Capital 1 nach einem Jahr mit dem dazugerechneten jährigen Zins, so ist

$$\frac{100+u}{100} = \sqrt[m]{\frac{100+k}{100}},\ \text{also}$$

$$100+u = 100\sqrt[m]{\frac{100+k}{100}}\ \text{u.}\ u = 100\left[\left(\sqrt[m]{\frac{100+k}{100}}\right) - 1\right]$$

Nach dieser Formel muß also der Werth von u aus dem gegebenen jährlichen Procent k berechnet, und die gefundene Zahl in den vorhin angegebenen Formeln Nr. 1. und Nr. 2. statt u gesetzt wer-

werden, um entweder die Mise G der mteljährigen vorschußlichen Rente a vermittelst der Formel Nr. 1. oder diese mteljährige vorschußliche Rente a selbst vermitteest der Formel Nr. 2. zu berechnen.

§. 8. Eine Rente kann so genommen werden, daß sie erst nach einer gewissen Zeit zu laufen anfängt, oder nach einer bestimmten verflossenen Anzahl von Terminen, zum Beispiel nach f Terminen, zum erstenmal zahlbar wird. Alsdann heißt sie eine auf f—1 Termine aufgeschobene Zeitrente.

Erste Aufgabe.

Der baare Werth c einer auf f—1 Jahre aufgeschobenen Jahrrente a, die n Jahre zu laufen hat, und am Ende eines jeden Jahres zahlbar ist, wird gesucht, die jährlichen Zinsen zu k Procent gerechnet.

Gesetzt, man gebe baar c Geldstücke, so ist diese Mise nach f — 1 Jahren, wenn zusammengesetzte Zinsen gerechnet werden, auf $\left(\frac{100+k}{100}\right)^{f-1} c = H$ angewachsen. (Seite 156.)

Da aber von diesem Zeitpunkt an die Rente a läuft, so ist dieser Werth H als die eigentliche Mise zu betrachten für die Rente a, welche n Jahre zu laufen hat. Es ist aber der baare Werth H, der

auf den Zeitpunkt, da c auf H angewachsen ist, zurückdiscontirten Rente a, nach der zehnten Aufgabe, Seite 236,

$$H = \frac{\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right] 100a}{k\left(\frac{100+k}{100}\right)^n}$$

Ferner ist von dem angewachsen und auf f — 1 Jahre zurückdiscontirten Capital H der baare Werth $c = \frac{H}{\left(\frac{100+k}{100}\right)^{f-1}}$. (7. Abschnitt, §. 11. Seite 164).

Substituirt man nun in diesem letztern Ausdruck statt H den vorhin angegebenen Werth desselben,

$$\text{so ist } c = \frac{\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right] 100\,a}{k\left(\frac{100+k}{100}\right)^{n+f-1}}$$

und wenn man mit Logarithmen rechnet, so ist

$$\log. 100\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right] + \log. a -$$
$$\Big((n+f-1)\,[\log.(100+k) - \log. 100] + \log. k\Big) = \log. c.$$

Zweite Aufgabe.

Die Größe a der auf f — 1 Jahre aufgeschobenen Jahrrente, die von dem gedachten Zeitpunkte an, am Ende eines jeden Jahres bezahlt wer-

werden und n Jahre laufen soll, zu bestimmen, wenn sie mit der Mise c zu k Procent gekauft wurde.

Aus der vorigen letzten Formel, kann sogleich hergeleitet werden

$$\log. a = \log. c + (n + f - 1)[\log.(100 + k) - \log. 100] + \log. k - \log. \left(100\left[\left(\frac{100 + k.}{100}\right)^n - 1\right]\right)$$

Zahlenbeispiel.

Ein Ehepaar gibt zur Mise ein Capital von 1000 fl., mit der Bedingung, daß der Entrepreneur dafür nach dem Tod des Mannes der Wittwe eine Rente, die zu Ende eines jeden Jahres fällig ist, bezahlet. Nach 31 Jahren stirbt der Mann, und der Wittwe soll die Rente 15 Jahre lang entrichtet werden. Wie viel erhält sie am Ende eines jeden Jahres, wenn bei dieser Uibereinkunft die jährlichen Zinsen zu 5 Procent angeschlagen wurden?

Hier ist $c = 1000$, $k = 5$. Da der Mann im 32sten Jahre nach der Uibergabe des Capitals stirbt, so muß die Rente am Ende des 33sten Jahres zum erstenmal ausgezahlt werden. Also ist $f = 33$, und die Rente auf $f - 1$ oder 32 Jahre aufgeschoben, und da sie 15 Jahre laufen soll, so ist $n = 15$. Also $n + f - 1 = 47$. Folglich

$$\log. a = \log. 1000 + 47(\log. 105 - \log. 100) + \log. 5 - \log. 100\left[\left(\frac{105}{100}\right)^{15} - 1\right]$$

Es

Es ist aber log. 105 − log. 100 = 0,0211893, ferner 47 . 0,0211893 = 0,9958971 und 15 . 0,0211893 = 0,3178395. Die zu diesem letztern Logarithmus gehörige Zahl, oder $(\frac{105}{100})^{15}$ ist = 2,078928. Davon 1 ab, so ist der Rest 1,078928 und diesen multiplicirt mit 100, gibt das Product 107,8928, wovon der Logarithmus = 2,0329924 ist. Also ist log. a = 3 + 0,9958971 + 0,6989700 − 2,0329924.

Wenn man die Rechnung gehörig hinausführt, so findet man a = 459,0655 oder in ganzen Zahlen 459 fl. So viel muß jährlich der Wittwe bezahlt werden.

Erste Anmerkung.

Eine aufgeschobene Rente, die vorschußlich gezahlt werden soll, (mit Anfang des Jahres in welchem sie zu laufen anfängt, und eben so mit Anfang eines jeden folgenden Jahres,) ist als eine auf ein Jahr weniger aufgeschobene Rente zu betrachten. Wäre also die in dem vorigen Zahlenbeispiel erwähnte Rente eine vorschußliche, so wäre f = 32, und f − 1 = 31, sie wäre also als eine auf 31 Jahre aufgeschobne Rente zu betrachten. Folglich ist n + f − 1 = 46. Die Zahlen für die übrigen Buchstaben bleiben.

Zwei-

Zweite Anmerkung.

Um die Größe z einer auf f — 1 Jahre aufgeschobenen Zeitrente, die von dem gedachten Zeitpunkt an, am Ende eines jeden mten Theils des Jahres bezahlt werden, und n Jahre laufen soll, zu bestimmen, wenn sie mit der Mise c zu k jährlichen Procent gekauft wurde, berechne man zuerst, vermittelst der in dieser Aufgabe Seite 309 angegebenen Formel, die aufgeschobene Jahrrente a, wenn solche nicht schon bekannt ist, substituire diesen Zahlenwerth in der Formel

$$z = \frac{100a\left[\left(\sqrt[m]{\frac{100+k}{100}}\right)-1\right]}{k}$$

welche Seite 294 hergeleitet wurde statt a, und suche, vermittelst dieser Formel, den Werth von z. Oder man substituire in der Formel Seite 309,

$\log. u$, d. i. $\log. 100\left(\sqrt[m]{\frac{100+k}{100}}-1\right)$

statt $\log. k$, so ist $\log. z = \log. c + (n+f-1)$ $[\log.(100+k) - \log. 100] + \log. u -$

$$\log.\left(100\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right]\right),$$

Dritte Aufgabe.

Eine nach n Jahren zahlbare Summe t soll durch eine Rente auf eben so viele Jahre abgetragen werden, welche sogleich zu laufen anfängt, und

am Ende eines jeden Jahres ausgezahlt wird. Wie groß ist die Rente a, wenn das jährliche Procent k ist?

Man sieht leicht, daß diese Aufgabe mit der sechsten Aufgabe im achten Abschnitt, Seite 212 einerlei ist. Aber das dortige Capital c, zu welchem am Ende eines jeden Jahres a geschlagen wird, ist hier Null, weil am Anfang des ersten Jahres nichts von der Rente entrichtet wird. Also ist auch $c\left(\frac{100+k}{100}\right)^n =$ Null. Daher verändert sich die Seite 213 angegebene Formel in folgende:

$$\log. t + \log. k - \log. \left(100\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right]\right) = \log. a.$$

Wenn die Rente z am Ende eines jeden mten Theil des Jahres ausgezahlt werden soll, so substituire man nach der dritten Anmerkung des 4ten Beispiels, Seite 290 log. u oder

$\log. \left(100\left[\left(\sqrt[m]{\frac{100+k}{100}}\right) - 1\right)\right]$ statt log. k in der eben angegebenen Formel, so ist

$$\log. t + \log. u - \log. \left(100\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right]\right) = \log. z.$$

Anmerkung.

Wenn diese Rente vorschußlich seyn, also am Anfang eines jeden Jahres ausbezahlt werden soll, so ist das eben so viel, als wenn im Anfang

des

des ersten Jahres die Summe c ausgezahlt, und eine gleiche Summe c am Ende eines jeden Jahres, nur am Ende des nten Jahres nicht, zugelegt wird, die nun miteinander, nebst den dazu gerechneten zusammengesetzten Zinsen, am Ende des nten Jahres der nach n Jahren zahlbaren Summe w gleich sind. Die gesuchte Rente wird also hier mit c bezeichnet, und vermittelst der im achten Abschnitt, sechste Aufgabe, dritte Anmerkung, Seite 216 angegebenen Formel gefunden. Es ist nemlich

$$\lg.w + \lg.k - \lg.\left(\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right](100+)\right) = \lg.c.$$

Z. B. Jemand gibt zur Mise ein sicheres Capital von 10000 fl. das aber erst nach 20 Jahren ausgezahlt wird, auch bis dahin keine Zinsen trägt, und verlangt eine vorschußliche Rente auf 20 Jahre, die sogleich zu laufen anfängt. Wie groß ist diese Jahrrente, den jährlichen Zins zu 4 Procent gerechnet?

Es ist $w = 10000$, $n = 20$ und $k = 4$.

Uibrigens ist die Berechnung wie in dem Seite 217 angegebenen Beispiel. Folglich ist auch das Resultat = 322,9029 fl., oder = 322 fl. 54 Kr.

§. 9. Eine Rente, welche von dem Zeitpunkt an, da sie zu laufen anfängt, nicht terminweise ausbezahlt, sondern erst nach Verlauf des letzten

Ter-

Termins mit einer gewissen Summe t auf einmal abgetragen wird, heißt eine **aufgesparte Rente.**

Vierte Aufgabe.

Wenn eine Jahrrente a auf n Jahre, nicht terminweise am Ende eines jeden Jahres ausbezahlt wird, zu finden, wie viel nach Verlauf des nten Jahres die alsdann zahlbare Summe t, welche dem angewachsenen Werth der Rente gleich ist, beträgt, wenn das jährliche Procent = k ist.

Es sey der anfängliche baare Werth oder die Mise der Rente a, die n Jahre läuft, = c. Stellt man sich vor, der Rentenirer habe dieses Capital n Jahre lang ausstehen, so ist der Werth desselben, mit den dazugerechneten zusammengesetzten Zinsen, am Ende des nten Jahres auf $\left(\frac{100+k}{100}\right)^n c$ oder t angewachsen. Auf eben so viel, nemlich auf t ist also auch der Werth der aufgesparten Rente gestiegen. Es ist aber nach der zehnten Aufgabe des achten Abschnitts, Seite 236 der anfängliche baare Werth c der am Ende eines jeden Jahres zu bezahlenden Rente a, die n Jahre

läuft $= \frac{\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right] 100a}{k\left(\frac{100+k}{100}\right)^n}$, wird also der

Zäh-

Zähler dieses Ausdrucks mit $\left(\frac{100+k}{100}\right)^n$ multiplicirt, oder der Nenner desselben damit dividiret,

$$\text{so ist } \frac{\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right] 100a}{k} = t.$$

Erste Anmerkung.

Ist die auf n Jahre aufgesparte Rente a eine mteljährige, so wird in dem Nenner dieser Formel statt k der Werth u oder $100\left[\left(\sqrt[m]{\frac{100+k}{100}}\right) - 1\right]$ gesetzt, nach Seite 290.

$$\text{Alsdann ist } \frac{\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right] a}{\left(\sqrt[m]{\frac{100+k}{100}}\right) - 1} = t.$$

Zweite Anmerkung.

Ist die auf n Jahre aufgesparte Rente a eine vorschußliche, so wird ihr künftiger Betrag w so bestimmt. Man stelle sich vor, zu der bei Anfang des ersten Jahres fälligen Rente a, werde am Anfang des zweiten Jahres die Rente a, die in diesem Termine fällig war, gelegt, u. s. w. am Anfang des nten Jahres zum letztenmal, so ist die Auflösung dieser Aufgabe, mit der Auflösung der vierten Aufgabe des achten Abschnitts, zweite Anmerkung, Seite 205 einerlei, also auch die Formel

mit der Seite 205 angegebenen, nur daß jetzt statt c der Buchstabe a gebraucht wird, welches hier gleichgültig ist, weil in diesem Fall das dortige c = a, also ist

$$\frac{\left[\left(\frac{100+k}{100}\right)^n - 1\right](100+k)a}{k} = w.$$

Z. B. Ein Rentengeber sollte 6 Jahre nach einander, und zwar mit Anfang eines jeden Jahres eine vorschußliche Rente von 4000 fl. auszahlen, er bezahlte aber nichts. Wie viel hat er am Ende des 6ten Jahres mit einander zu entrichten, wenn die Zinsen zu 4 Procent gerechnet werden?

Es ist a = 4000, n = 6 und k = 4.

Die Berechnung ist, wie bei dem Seite 207 ausgeführten Beispiel, also auch das Resultat = 27593 fl. sehr nahe.

§. 10. Renten, welche nach einem gegebenen Gesetz steigen oder fallen, heißen veränderliche Renten.

Fünfte Aufgabe.

Wenn eine Rente auf n Jahre, welche am Ende eines jeden Jahres gezahlt wird, nach einer arithmetischen Progression steigt, deren Differenz = d ist, den baaren Werth c oder die Mise c dieser Rente zu finden, wenn die jährlichen Zinsen zu k Procent gerechnet werden.

Da

Da diese Rente in einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied a und die Differenz $= d$ ist, steigen soll, so wird am Ende des ersten Jahres, a, am Ende des zweiten, $a+d$, am Ende des dritten $a+2d$, am Ende des vierten, $a+3d$ u. s. f., endlich am Ende des nten Jahres, $a+(n-1)d$ ausbezahlt.

Da nun nach einem Jahr, 100 fl. mit den dazu gerechneten jährlichen Zins auf $100+k$ fl. anwachsen, so wächst das Capital 1 auf $\frac{100+k}{100}$ an. Wenn dieser Ausdruck mit r bezeichnet wird, so wächst das Capital c oder die Mise im ersten Jahr auf rc an, davon am Ende des ersten Jahres die Rente a weggenommen, so ist von der Mise c am Ende des ersten Jahres $rc-a$ übrig. Dieser Rest wächst mit dem dazu gerechneten jährlichen Zins im zweiten Jahr auf r^2c-ra an, (nemlich $1:r = rc-a : r^2c-ra$,) davon am Ende des Jahres die Rente $a+d$ weggenommen, so ist der Rest der Mise c am Ende des zweiten Jahres $= r^2c-ra-(a+d)$ Dieser Rest wächst im dritten Jahr auf $r^3c-r^2a-r(a+d)$ an, nemlich $1:r = r^2c-ra-(a+d) : r^3c-r^2a-r(a+d)$, davon am Ende des dritten Jahres die Rente $a+2d$ weggenommen, so ist von der Mise c am Ende des dritten Jahres $r^3c-r^2a-r(a+d)-(a+2d)$ übrig. Eben so fin-

findet man, daß der Rest der Mise am Ende des vierten Jahres $r^4 c - r^3 a - r^2(a+d) - r(a+2d) - (a+3d)$, am Ende des fünften Jahres $r^5 c - r^4 a - r^3(a+d) - r^2(a+2d) - r(a+3d) - (a+4d)$ ist. Folglich ist der Rest der Mise am Ende des nten Jahres, $r^n c - r^{n-1} a - r^{n-2}(a+d) - r^{n-3}(a+2d) \ldots - (a+(n-1)d)$.

Da aber am Ende des nten Jahres die Mise aufgezehrt ist, so ist dieser Rest der Mise = Null, oder auch $r^n c -$

$$[ar^{n-1} + (a+d)r^{n-2} + (a+2d)r^{n-3} \ldots + (a+(n-1)d)] = 0.$$

Nun ist $r^{n-2} = \frac{r^{n-1}}{r}$, ferner $r^{n-3} = \frac{r^{n-1}}{r^2}$ u. s. f.

Also ist $r^n c -$

$$\left[ar^{n-1} + \frac{(a+d)r^{n-1}}{r} + \frac{(a+2d)r^{n-1}}{r^2} \ldots + \frac{(a+(n-1)d)r^{n-1}}{r^{n-1}}\right] = 0$$

und wenn man den gemeinschäftlichen Factor r^{n-1} trennt, so ist

$$r^n c - r^{n-1}\left[a + \frac{a+d}{r} + \frac{a+2d}{r^2} \ldots + \frac{a+(n-1)d}{r^{n-1}}\right] = 0.$$

Es muß nun die in den Klammern eingeschlossene Reihe summiret werden. Die Summirungsformel ist im sechsten Abschnitt, §. 10, Seite 144 hergeleitet, und Seite 146 angegeben. Folglich ist

$$r^n c - \frac{r^{n-1}\left(r[(r-1)a+d] - [(r-1)a+((r-1)n+1)d]\frac{r}{r^{n-1}}\right)}{(r-1)^2} = 0$$

Also

Also $c = \frac{r^n[(r-1)a+d] - [(r-1)a + ((r-1)n+1)d]}{r^n (r-1)^2}$

Z. B. Jemand will eine Jahrrente, welche 30 Jahre läuft, kaufen, so daß ihm am Ende des ersten Jahres 200 fl. und am Ende jedes folgenden Jahres 50 fl. mehr als am Ende des nächst vorhergehenden ausgezahlt werde. Wie viel muß er baar erlegen, oder wie groß ist die Mise c, wenn die jährlichen Zinsen zu 5 Procent gerechnet werden.

Es ist $n = 30$, $a = 200$, $d = 50$ und $k = 5$. Also $\frac{100+k}{100}$ oder $r = \frac{105}{100}$, $r^n = (\frac{105}{100})^{30}$, $r-1 = \frac{105}{100} - 1$ oder $= \frac{5}{100}$, $(r-1)a = \frac{5}{100} . 200$ oder $= 10$, $(r-1)a + d = 10 + 50$ oder $= 60$, $(r-1)n = \frac{5}{100} . 30$ oder $= 1\frac{1}{2}$, $((r-1)n+1)d = (1\frac{1}{2}+1)50$ oder $= 125$ und $(r-1)^2 = (\frac{5}{100})^2$ oder $= \frac{25}{10000}$.

$$\text{Folglich ist hier } c = \frac{(\frac{105}{100})^{30} . 60 - (10+125)}{(\frac{105}{100})^{30} . 0{,}0025}$$

Zuerst ist $(\frac{105}{100})^{30}$ vermittelst der Logarithmen zu berechnen.

Es ist aber log. $\left(\frac{105}{100}\right)^{30} = 30\,(\log. 105 - \log. 100)$

$$\begin{array}{rrl} & \log.\ 105 & = 2{,}0211893 \\ \text{ab} & \log.\ 100 & = 2 \\ \hline & & 0{,}0211893 \\ & \text{multiplicirt mit} & 30 \qquad 30 \\ \hline \text{Also } \log. \left(\frac{105}{100}\right)^{30} & & 0{,}6356790 \end{array}$$

Die zu diesem Logarithmus gehörige Zahl, oder $\left(\frac{105}{100}\right)^{30}$ ist $= 4{,}321942$. Folglich ist

$$c = \frac{4{,}321942 \,.\, 60 - 135}{4{,}321942 \,.\, 0{,}0025}$$

$$\text{oder } c = \frac{124{,}31652}{0{,}010804855}$$

$$\text{d. i. } c = \frac{124316520000}{10804855}$$

Nach gehöriger Berechnung findet man $c = 11505$ fl. 36 Kr.

Exempel zur Uibung.

Jemand will eine Jahrrente, welche 36 Jahre läuft, kaufen, so daß ihm am Ende des ersten Jahres 350 fl., und am Ende jedes folgenden Jahres 25 fl. mehr als am Ende des nächst vorhergehenden ausgezahlt werde. Wie viel muß er baar erlegen, oder wie groß ist seine Mise c, wenn die jährlichen Zinsen zu 5 Procent gerechnet werden? Sehr nahe an 10957 fl.

Zusatz

Zusatz

zu §. 39. des zweiten Abschnitts, Seite 66.

Man kann auch den Logarithmus eines gegebenen gewöhnlichen ächten Bruchs auf folgende Art durch zwei Theile ausgedrückt finden, ohne daß man nöthig hat, den gegebenen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln. Man addire nemlich zu dem Logarithmus m des Zählers eine beliebige ganze Zahl n, die aber wenigstens so groß ist, daß man den Logarithmus des Nenners von der Summe $m + n$ abziehen kann, hierauf subtrahire man von dieser Summe den Logarithmus des Nenners, und setze zu dem Rest die gewählte Zahl n mit dem Subtractionszeichen. Z. B. Es soll der Logarithmus von $\frac{5}{8}$ gefunden werden. Der Logarithmus des Zählers 5 ist $= 0,6989700$. Zu ihm addire man 1, so ist die Summe 1,6989700. Der Logarithmus des Nenners 8 ist $= 0,9030900$. Diesen subtrahire man von der vorigen Summe 1,6989700. Der Rest ist 0,7958800. Zu diesem Rest setze man 1 mit dem Subtractionszeichen, so ist $0,7958800 - 1$ der gesuchte Logarithmus des Bruchs $\frac{5}{8}$. Denn $\frac{5}{8}$ ist so viel 5 dividiret mit 8, folglich findet man den

den Logarithmus von $\frac{5}{8}$, wenn man den Logarithmus des Nenners 8 vom Logarithmus des Zählers 5 subtrahirt (§. 14), aber bei einem ächten Bruch ist der Logarithmus des Nenners größer als der Logarithmus des Zählers. Man addire also eine beliebige ganze Zahl, z. B. 1 zu dem Logarithmus des Zählers, damit der Logarithmus des Nenners abgezogen werden kann, setze aber zugleich diese Zahl wiederum als zu subtrahirend an, damit sich der Werth des Logarithmus des Zählers nicht ändere. Nemlich 1,6989700 - 1 ist soviel als 0,6989700. Also

	1,6989700 - 1
davon ab	0,9030900
so ist der Rest	0,7958800 - 1

der gesuchte Logarithmus des Bruchs $\frac{5}{8}$.

Eben so, wenn der Logarithmus des Bruchs $\frac{100}{105}$ gefunden werden soll, so nehme man den Logarithmus des Zählers 100, dieser ist = 2, zu ihm addire man eine beliebige ganze Zahl, am bequemsten die Zahl 7, (denn so wird die Kennziffer des Restes 6, also die zu diesem Rest gehörige Zahl mit 7 Ziffern eine ganze Zahl seyn,) so ist 2 + 7 = 9.

Also von	9 -7
ab log. 105 =	2,0211893
so ist der Rest	6,9788107 - 7

der gesuchte Logarithmus des Bruchs $\frac{100}{105}$.

Hätte

Hätte man statt 7 nur 1 zum Logarithmus des Zählers addirt, so wäre die Rechnung folgende. Es ist 2 + 1 = 3, also

	von 3	− 1
ab log. 105 =	2,0211893	
so ist der Rest	0,9788107	− 1

der gesuchte Logarithmus des Bruchs $\frac{100}{105}$.

Zusatz, zu §. 5. Seite 100.

Daß aber x in diesen beiden Functionen

$$0 = 0 + 0x + 0x^2 \text{ u. s. f.}$$

und $0 = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ u. s. f.

einerlei Werth hat, oder x in der obern Reihe mit x in der untenstehenden Reihe ganz identisch ist, erhellet daraus. Weil in der obern Reihe jeder Coefficient = 0 ist, so bleibt die Reihe = 0, man mag in ihr für x jeden Werth annehmen, welchen man will. In der untenstehenden Reihe soll aber nach der Voraussetzung x auch jeden beliebigen Werth haben, und die Reihe immer = 0 seyn, also ist dieses x mit dem x der obern Reihe einerlei, folglich ist $\beta x = 0x$, und wenn man mit x dividiret, $\beta = 0$. Ist nun x der obern Reihe einerlei mit dem x der untenstehenden, so ist auch x^2 der obern Reihe einerlei mit x^2 der untenstehenden, also $\gamma x^2 = 0x^2$, und wenn man mit x^2 dividiret, so ist $\gamma = 0$. u. s. f. Also ist $0 = \alpha + 0x + 0x^2$ u. s. f.

d. i. $0 = \alpha + 0 + 0$ oder auch $\alpha = 0$.

Verbesserungen.

Seite 89, Zeile 8, statt 0,9933244 . . . lese man 0,9935320.

Seite 97, Zeile 15, statt p log. m = x. log. B, lese man p Log. m = x. Log. B. und so auch auf den drei folgenden Zeilen statt log. m. und log. B lese man Log. m und Log. B.

Seite 102, Zeile 5, statt $\frac{B-2}{a}$ lese man $B = \frac{-2}{a}$.

Seite 146, Zeile 7 im Zähler der Formel, statt $((r-1)n+1))d$ lese man $((r-1)n+1)d$

Auf der nemlichen Seite, Zeile 10, im Zähler des Zahlenbeispiels, statt [10(+10+1)2] lese man [10+(10+1)2]

Jn

In eben diesem Verlag sind auch nachfolgende Bücher zu haben:

Praktische Anweisung zur algebraischen und combinatorischen Rechnung, in Beziehung auf bürgerliche Geschäfte, mit einer methodisch geordneten Auswahl von brauchbaren Beispielen, zur Selbstübung und für den öffentlichen und Privatunterricht, von Joh. Wolfg. Müller, Professor der Mathematik am Königl. Gymnasium zu Nürnberg, als der erste Theil der gegenwärtigen Schrift. 8. 1 fl. 30 kr.

Der Hauptinhalt davon enthält die Gleichungen überhaupt — Zahlengleichungen vom ersten Grad mit einer einzigen, mit zwei, mit drei und mehr unbekannten Größen — Unbestimmte Aufgaben, welche blos auf Zahlengleichungen vom ersten Grad führen — Quadratische Zahlengleichungen oder Zahlengleichungen des zweiten Grads — Buchstabenrechnung — Buchstabengleichungen — Arithmetische Progressionen — Permutationen oder Versetzungen ohne Wiederholungen — Combinationen — Variationen — Permutationen mit Wiederholungen, und die Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Dieses Buch kann auch als der erste Theil der logarithmischen algebraischen Rechnung angesehen werden. — Ferner:

Aus-

Ausführliche praktische Anweisung zur leichten und richtigen Berechnung des cubischen Inhalts der Baumstämme, des beschlagenen Holzes, und anderer zur Forstgeometrie gehörigen Aufgaben, mit beigefügten Tabellen. Nebst einer Anleitung zur Decimalrechnung, von Joh. Wolfgang Müller, Professor der Mathematik am Gymnasium zu Nürnberg. 8. 1 fl. 15 kr.

Diese Schrift enthält eine faßliche Anweisung zur Berechnung des cubischen Inhalts der cylindrischen, kegelförmigen und solcher Baumstämme, die sich der Form eines abgekürzten Kegels nähern, so daß das Resultat sich ohne beschwerliche Division sogleich in Cubikfußen ergibt, es mag bey der Berechnung Decimal- oder Duodecimalmaas, Durchmesser oder Umfang in Zollen und Linien gegeben seyn. Außerdem enthält sie auch eine Anleitung zur Berechnung des cubischen Inhalts beschlagener Stämme, eine faßliche Darstellung der Reductionsrechnung von Morgen und Klaftern, und eine leichte Auflösung der Aufgaben: einen Wald in jährliche Gehaue abzutheilen, und den künftigen Waldbestand in einem geschonten Revier zu berechnen. — Als Anhang ist beygefügt, die Lehre von den Decimalbrüchen, nebst ihrer Anwendung auf allerlei in bürgerlichen Geschäften vorkommende Aufgaben; ferner eine Tabelle zur leichten Berechnung der Baumstämme und zur Berechnung des Preises einer beliebigen Anzahl Cubikfuße in Gulden und Kreuzern. — Der Verfasser suchte den Vortrag so faßlich einzurichten, daß nicht nur Personen, die sich dem Forstwesen widmen, sondern auch andere, welche Holz nach der Menge der Cubikfuße verkaufen oder kaufen, dadurch in Stand gesetzt werden, die Rechnung mit Beurtheilung und richtig zu führen.

Bun=

Bunzels, Sam. Chr. Nöthiges Wissen eines Wechselrechners, oder neuestes Münz- und Courssystem der vornehmsten Handelsstädte, mit den nöthigsten Universalregeln, welche sowohl bei Wechselreductionen, als Berechnung der Facturen mit vielem Vortheil benutzt werden können. Aufs neue bearbeitet und nach den neuesten Wechselcoursen eingerichtet. 8. 36 kr.

Kurze Anleitung zu der neuester Zeit im Handel und Wandel üblich seyenden Rechenkunst, der lehrbegierigen und handlungsbeflissenen Jugend zum Besten herausgegeben von Andr. Inspruckner. Ganz neue nach jetzigen Zeitverhältnissen eingerichtete und verbesserte Auflage. 8. 30 kr.

Fabri, J. E. Abriß der natürlichen Erdkunde, insonderheit Geïstik, in ausführlicher Darstellung für Academien und Gymnasien. 8. 2 fl.

Meyniers praktische französische Sprachlehre in Beispielen und Uebungen über alle Theile der Grammatik. 8. 1 fl.

Dessen Grammaire française, oder die auf ihren wahren Gründen ruhende französische Grammatik, theoretischer Theil. 8. 36 kr.

Racolta delle più eleganti Novelle di Giov. Boccaccio, oder Sammlung der schönsten Novellen von Boccaccio, zum Nutzen junger Freunde der italienischen Sprache. 8. 1 fl. 24 kr.

Schilderung der vornehmsten Völker aller Welttheile oder Abenderzählungen eines Vaters unter seiner Familie von den Sitten, Gebräuchen und Gewohnheiten fremder Nationen, mit 24 illuminirten Abbildungen. 8. 2 fl. —

Völ-

Völkergallerie für Kinder in unterhaltenden Erzählungen von den Sitten, Gebräuchen und Kleidungen fremder Nationen, mit 24 illuminirten Kupfern. 8. 1 fl. 15 kr.

Historisches Fragespiel über die vorzüglichsten Ereignisse in unserm deutschen Vaterland bis auf unsere Zeit. 8. 1 fl.

Das goldene Buch für Kinder, welche guten und gesitteten Menschen beigezählt zu werden wünschen. Eine lehrreiche und unterhaltende Geschichte. 8. 1 fl. 24 kr.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Sauer,

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Müller, Johann W.

Praktische Anweisung zur algebraischen und combinatorischen Rechnung in Beziehung auf bürgerliche Geschäfte mit einer methodisch geordneten Auswahl von brauchbaren Beispielen zur Selbstübung und für den ö
ffentlichen und Privatunterricht
Bd.: 2

Nürnberg (1814)

Math.p. 369-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082449-3